École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Arnaud VANHAECKE

Cohomologie de systèmes locaux p-adiques sur les revêtements du demi-plan de Drinfeld

---

dirigée par Pierre Colmez

Soutenue le 18 décembre devant le jury composé de :

Christophe Breuil	Université Paris-Saclay	président
Pierre Colmez	Sorbonne Université	directeur
Jean-François Dat	Sorbonne université	examinateur
Matthew Emerton	University of Chicago	rapporteur (excusé)
Ariane Mézard	DMA ENS	examinatrice
Benjamin Schraen	Université Claude Bernard Lyon 1	rapporteur

Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université.
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

« Ô mathématiques saintes, puissiez-vous, par votre commerce perpétuel, consoler le reste de mes jours de la méchanceté de l'homme et de l'injustice du Grand-Tout ! »

Chant de Maldoror II, Isidore Ducasse,
Comte de Lautréamont

Remerciements

Mes remerciements les plus profonds et les plus sincères vont à mon directeur de thèse, Pierre Colmez, qui m'a accompagné ces cinq dernières années. Au-delà du mathématicien dont l'œuvre m'a envoutée, je ne saurais comment lui exprimer ma reconnaissance pour sa confiance et sa patience à mon égard. J'espère que ce manuscrit honore à sa juste valeur la chance que j'ai eue. Pour tout cela, tout ce que j'ai appris, l'influence mathématique considérable et bien plus encore, Pierre, merci infiniment.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement mon jury, constitué de mathématiciens et d'une mathématicienne dont les travaux ont eu une influence conséquente sur cette thèse ; je suis très honoré qu'ils jugent mon travail. D'une part, je remercie vivement mes rapporteurs, Benjamin Schraen et Matthew Emerton, pour avoir accepté le travail conséquent de rapporter cette thèse. Je leur suis particulièrement redevable pour les nombreuses remarques qui ont significativement amélioré la qualité du texte. De façon indépendante, j'aimerais remercier Benjamin pour son soutien à de multiples reprises, sa gentillesse et son intérêt pour mon travail. D'autre part, les autres membres de mon jury ont tous joué un rôle dans mon aventure mathématique. Je remercie Christophe Breuil d'avoir pris le temps d'échanger avec moi autour du programme de Langlands p-adique. Je remercie Jean-François Dat, qui a été mon tuteur pendant presque six ans, pour son soutien et les opportunités qu'il m'a offertes. Enfin, je remercie de tout mon cœur Ariane Mézard dont le soutien et les conseils me sont extrêmement précieux ; elle m'a aidé sur de trop nombreux aspects pour les énumérer. J'aimerais finalement remercier Laurent Fargues et Michael Rapoport pour la rigueur mathématique qu'ils m'ont enseignée ; leur œuvre mathématique respective a eu une énorme influence sur moi.

J'aimerais remercier toutes celles et tous ceux qui ont cru en moi et qui m'ont accordé leur confiance au-delà de tout jugement. Merci pour les verres et les repas que l'on a partagés, les nuits à danser ou à jouer aux cartes, les discussions pendant de longues marches ou de petites balades, les fous rires pendant les concerts ou les déménagements... J'ai fait le choix de vous laisser vous reconnaître individuellement, parce qu'au fond je sais que vous êtes conscients de ma gratitude à votre égard. Merci aussi à ma famille en Belgique ; j'ai une pensée toute particulière pour mes grands-parents qui auraient été fiers de moi. Merci finalement à mes beaux-parents, pour leurs accueils au sein de leurs familles et pour nos moments conviviaux.

J'aimerais remercier le DMA pour l'environnement de travail exceptionnel qu'il m'a octroyé. Je remercie celles et ceux qui sont venus toquer à ma porte comme ceux qui m'ont ouvert la leur quand je suis venu profiter de leur sagesse. J'ai été ravi de contribuer au prosélytisme p-adique dans ces locaux mythiques. Merci aux enseignants qui m'ont fait confiance pour animer les travaux dirigés de leur cours, cette première rencontre avec l'enseignement était un réel plaisir, en grande partie grâce aux nombreux étudiants qui y ont participé activement. Merci aussi aux étudiants avec qui j'ai beaucoup appris et au personnel d'une efficacité hors du commun.

Je remercie tous ceux qui m'ont invité à venir parler de mathématiques dans leurs institutions ou leurs évènements, mais aussi celles et ceux qui sont venus m'écouter et m'ont questionné. Votre bienveillance et votre accueil m'ont motivé à continuer pour revivre ces moments charnières de notre profession. Je remercie les organisateurs des conférences auxquelles j'ai eu la chance d'assister. L'intensité des rencontres et des échanges dans ces moments ont grandement marqué mon esprit. Je garde un souvenir indélébile d'une école d'été à Padoue où des liens forts se sont créés. À tous celles et ceux que j'ai rencontrés à ces occasions, je vous dis merci beaucoup et j'espère sincèrement vous revoir prochainement.

J'aimerais remercier le laboratoire de mathématiques de Poitiers dont la bibliothèque m'a accueilli dès mon plus jeune âge et où ma passion pour les mathématiques s'est déployée.

Enfin, j'aimerais dédier cette thèse aux personnes suivantes :

À Quentin, à notre amitié et aux moments singuliers que l'on partage.

À mes parents, Pol et Lieve, pour leur amour inconditionnel et leur soutien indéfectible. Il va de soi que cette thèse leur doit beaucoup.

À Chloé, à qui mon cœur appartient. Nos moments heureux seront bientôt comblés de cette terrasse dont on a tant rêvé. Merci d'être auprès de moi, l'union de nos solitudes fait notre force.

COHOMOLOGIE DE SYSTÈMES LOCAUX p-ADIQUES SUR LES REVÊTEMENTS DU DEMI-PLAN DE DRINFELD

par

Arnaud Vanhaecke

Résumé. — Cette thèse est consacrée à la poursuite du programme de géométrisation de la correspondance de Langlands locale p-adique initié par Colmez, Dospinescu et Niziol dans leur article de 2020, sur le modèle de la correspondance classique. Ils démontrent que les représentations galoisiennes de dimension 2 qui sont supercuspidales (sous-entendue de de Rham) et à poids de Hodge-Tate 0 et 1 apparaissent dans la cohomologie étale p-adique de la tour de revêtement du demi-plan de Drinfeld et que leur multiplicité est donnée par la correspondance de Langlands p-adique. Le résultat principal de cette thèse est l'analogue de ce résultat en poids quelconque, en considérant la cohomologie étale p-adique à coefficients dans les puissances symétriques du système local universel sur la tour de Drinfeld. Une différence frappante est que l'on voit aussi apparaitre les représentations spéciales dans la cohomologie de la tour à coefficients, avec les multiplicités attendues. Le point clé est que les systèmes locaux que l'on considère s'avèrent être particulièrement simples : ce sont des opers isotriviaux. Ainsi, la première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des systèmes locaux p-adiques isotriviaux et au calcul dans le cas des opers isotriviaux sur les courbes d'un diagramme reliant la cohomologie proétale du système local à la cohomologie de Hyodo-Kato et la cohomologie de de Rham de la courbe. La seconde partie de cette thèse est alors l'application de ces résultats au cas de la tour de Drinfeld qui permettent le calcul des multiplicités évoquées.

Abstract. — This thesis is devoted to further developing the program of geometrization of the local p-adic Langlands correspondence, which was initiated by Colmez, Dospinescu and Niziol in their 2020 paper. They have shown that 2-dimensional Galois representations that are supercuspidal (implicitly de Rham) and with Hodge-Tate weights 0 and 1, appear in the p-adic étale cohomology of the coverings of Drinfeld's half-plane and that their multiplicity is given by the p-adic Langlands correspondence. The main result of this thesis is the generalization of this result in arbitrary weights, by considering the p-adic étale cohomology with coefficients in the symmetric powers of the universal local system on Drinfeld's tower. A striking novelty is the appearance of special representations in the cohomology of the tower with coefficients, with expected multiplicity. The key point is that the local systems which we consider turn out to be particularly simple: they are isotrivial opers. The first part of this thesis is devoted to the study of local isotrivial p-adic systems and to the calculation, in the case of isotrivial opers on curves, of a diagram linking the proetale cohomology of the local system to the Hyodo-Kato cohomology and the de Rham cohomology of the curve. The second part of this thesis is the application of these results to the case of the Drinfeld's tower, allowing the computation of the mentioned multiplicities.

Table des matières

1. Introduction

Soit p un nombre premier, soient $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil, $\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil-Deligne et $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui sera notre corps des coefficients ; on parle d'une *L-représentation* pour désigner une représentation sur un L-espace vectoriel. La correspondance de Langlands locale p-adique donne une correspondance entre les L-représentations continues de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et les L-représentations Banachiques de G. Cette thèse est consacrée à la poursuite du programme de géométrisation de cette correspondance initié par Colmez, Dospinescu et Niziol dans [**14**] sur le modèle de la correspondance classique. Plus précisément, on étend les résultats de [**14**] aux représentations de de Rham de poids quelconque en utilisant des coefficients non triviaux.

1.1. Les revêtements du demi-plan de Drinfeld et son système local

On note C le complété d'une cloture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, $\breve{\mathbb{Q}}_p$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et $\breve{\mathbb{Z}}_p = \mathrm{W}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ son anneau des entiers. Rappelons que $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ s'identifie au groupe des automorphismes continues et $\mathbb{Q}_p$-linéaires de C.

Soit D l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{Q}_p$, i.e. l'unique corps gauche tel que $\mathrm{inv}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{D} = \frac{1}{2}$. On note $\mathrm{O_D} \subset \mathrm{D}$ l'unique ordre maximal de D, $\varpi_{\mathrm{D}} \in \mathrm{O_D}$ une uniformisante et $\check{G} := \mathrm{D}^\times$ le groupe des éléments inversibles de D.

Le demi-plan p-adique de Drinfeld est défini comme

$$\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p).$$

Cet espace admet naturellement une structure d'espace analytique rigide sur $\mathbb{Q}_p$ et une action de G par homographie, compatible avec cette structure. Le théorème de représentabilité de Drinfeld (cf. [**24**]) donne une interprétation modulaire de cet espace. Plus précisément, il définit un espace formel $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ sur $\breve{\mathbb{Z}}_p$ à partir d'un problème de modules de quasi-isogénies de certains $\mathrm{O_D}$-modules formels, les $\mathrm{O_D}$*-modules spéciaux*. On note $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C} := \breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},\breve{\mathbb{Q}}_p} \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} C$ où $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},\breve{\mathbb{Q}}_p}$ est la fibre générique de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$. D'après le théorème de Drinfeld, les composantes connexes de $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}$ s'identifient alors à $\Omega_{\mathrm{Dr},C} := \Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$; plus précisément, $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C} \cong \Omega_{\mathrm{Dr},C} \times \mathbb{Z}$ en décomposant suivant la hauteur de la quasi-isogénie du problème de modules.

Le problème de modules fournit alors un $\mathrm{O_D}$-module spécial universel sur $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ dont le module de Tate définit un $\mathbb{Z}_p$-système local de rang 4 sur $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}$ que l'on note $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr}}$. Pour $n \geqslant 1$ un entier, on définit $\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}$, le n-ième étage de la tour de Drinfeld qui trivialise le système local de torsion $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr}}/\varpi^n_D$. C'est un revêtement galoisien de $\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr},C} := \breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}$ de groupe de Galois $\mathrm{O}^\times_{\mathrm{D}}/(1+\varpi^n_D\mathrm{O_D})$ et donc en particulier c'est un C-espace analytique rigide qui est Stein. On note $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ le système projectif non complété des $\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}$. L'espace $\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}$ est muni d'une action de $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$ compatible avec son action sur C ; il est donc muni d'une action de $G \times \check{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$. De plus, les flèches de transition $\breve{\mathrm{M}}^{n+1}_{\mathrm{Dr},C} \to \breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}$ sont équivariantes sous l'action de ces trois groupes.

On a un morphisme $\nu\colon G \times \check{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p^\times$ donné par $\det^{-1} \otimes \mathrm{nrd} \otimes \mathrm{rec}$ où $\det$ est le déterminant de G, nrd est la norme réduite de $\check{G}$ et $\mathrm{rec}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p^\times$ est le morphisme de réciprocité donné par le quotient $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{W}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p}$ et l'isomorphisme du corps de classe $\mathscr{W}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Q}_p^\times$ normalisé de sorte que le Frobenius arithmétique soit envoyé sur p. Rappelons que l'ensemble prodiscret $\pi_0(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}) = \varprojlim_n \pi_0(\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C})$ des composantes connexes de la tour est un espace homogène principal sous l'action de $\mathbb{Q}_p^\times$ et que l'action de $G \times \check{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$ sur ces composantes connexes est donnée par ν (cf. [**48**]).

Pour $\mathrm{H}^\bullet$ une théorie cohomologique (i.e. contravariante) raisonnable, en particulier celle de de Rham ou de Hyodo-Kato, on pose alors

$$\mathrm{H}^\bullet(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}) := \varinjlim_n \mathrm{H}^\bullet(\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}).$$

En inversant p, on définit un $\mathbb{Q}_p$-système local par $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}} := \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ sur $\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}$ et ses revêtements. Ce système local est $G \times \check{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant. Le système local qui nous intéresse est la $\mathbb{Q}_p$-algèbre symétrique associée à ce système local, soit

$$\mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}} := \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}.$$

Notons qu'il admet un réseau $\mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^+$ défini de façon similaire, mais qui n'est pas stable sous l'action de G et $\check{G}$. On définit finalement $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}$, puis sa L-algèbre symétrique $\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}$, en appliquant $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \cdot$ à $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}$ puis en tordant par un L-caractère lisse approprié pour rendre les actions de G et $\check{G}$ unitaires. On peut alors définir la cohomologie étale et proétale de $\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}$, qui est naturellement un L-espace vectoriel muni d'une action de $G \times \check{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$.

1.2. Cohomologie étale du système local p-adique et correspondance de Langlands p-adique

1.2.1. *Représentations de de Rham et objets associés.* — Rappelons que l'on note L notre corps des coefficients, qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que L est assez gros, en particulier qu'il contient l'extension quadratique non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et on fixe une injection $\mathrm{D} \hookrightarrow M_2(L)$ donnant $\check{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(L)$. Si V est une L-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2, que l'on suppose à poids $b > a \geqslant 0$, on lui associe les objets suivants :

- Un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ module de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, défini par

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) := \varinjlim_{[K:\mathbb{Q}_p]<\infty} \left(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{st}}\right)^{\mathscr{G}_K}.$$

- Une L-représentation $\mathrm{WD}(V) := \mathrm{WD}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[a+b])$ de $\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}$ obtenue par la recette de Fontaine (cf. [**28**]), où $[k]$ signifie que l'on multiplie l'action du Frobenius φ par p^k.
- Une L-représentation localement algébrique irréductible $\mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V)$ de G définie de la façon suivante : par la correspondance de Langlands locale, on associe à $\mathrm{WD}(V)$ une L-représentation lisse irréductible (de dimension infinie) de G notée $\mathrm{LL}^{\infty}(V) := \mathrm{LL}(\mathrm{WD}(V))$ puis, à partir des poids a et b, on pose

$$\underline{W}^*_{a,b} := \mathrm{Sym}_L^{b-a-1} \otimes_L \det{}^a \otimes_L |\det|_p^{\frac{a+b-1}{2}}, \quad \mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V) := \mathrm{LL}^{\infty}(V) \otimes_L \underline{W}^*_{a,b},$$

  où Sym^k_L est la puissance symétrique k-ième de la L-représentation régulière de G, i.e. celle obtenue en faisant agir naturellement G sur L^2.
- De même une L-représentation localement algébrique irréductible $\mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V)$ de $\check{G}$ définie de la façon suivante : par la correspondance de Jacquet-Langlands locale, on associe à $\mathrm{LL}^{\infty}(V)$ une L-représentation lisse irréductible (de dimension finie) de $\check{G}$ notée $\mathrm{JL}^{\infty}(V) := \mathrm{JL}(\mathrm{LL}^{\infty}(V))$ puis, à partir des poids b et a, on pose

$$\underline{\check{W}}_{a,b} := \check{\mathrm{Sym}}_L^{b-a-1} \otimes_L \mathrm{nrd}^a \otimes_L |\mathrm{nrd}|_p^{\frac{a+b-1}{2}}, \quad \mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V) := \mathrm{JL}^{\infty}(V) \otimes_L \underline{\check{W}}_{a,b},$$

  où $\check{\mathrm{Sym}}^k_L$ est la puissance symétrique k-ième de la L-représentation régulière de $\check{G}$, identifiée à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(L)$.
- Une L-représentation unitaire continue $\mathbf{\Pi}(V)$ de G obtenue par la correspondance de Langlands p-adique dont on note $\mathbf{\Pi}(V)'$ le dual stéréotypique.

Notons que les représentations $\mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V)$ et $\mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V)$ ne dépendent que du L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et des poids a et b. Un point fondamental est la relation entre $\Pi(V)$ et $\mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V)$: les vecteurs localement algébriques de $\Pi(V)$ sont précisément $\mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V)$, i.e.

$$\Pi(V)^{\mathrm{lalg}} = \mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$

On continue à supposer que V est à poids $\geqslant 0$, distincts. On dit que :

- V est *supercuspidale* (ou simplement cuspidale) si $\mathrm{WD}(V)$ est irréductible ou, de manière équivalente, si $\mathrm{LL}^\infty(V)$ est supercuspidale en tant que L-représentation lisse. Dans ce cas, $N = 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, ce qui signifie que V est potentiellement cristalline,
- V est *spéciale* si $N \neq 0$ (ce qui signifie que N est d'ordre maximal puisque $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ est de rang 2) ou, de manière équivalente, si $\mathrm{LL}^\infty(V)$ est le tordue par un caractère lisse de la L-représentation de Steinberg lisse de G. Dans ce cas, V est semi-stable à torsion près, non cristalline et $\mathrm{JL}^\infty(V)$ est un caractère lisse : ces dernières propriétés impliquent elles aussi que V est spéciale.

Notons que si V est supercuspidale ou spéciale, alors V est absolument irréductible sauf si V est spéciale et $b = a + 1$.

1.2.2. *Résultat principal.* — On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette thèse :

Théorème 1.1. — *Soit V une L-représentation absolument irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension $\geqslant 2$.*

1. *Si V est de dimension 2 et spéciale ou cuspidale alors, en tant que L-représentation de $G\times\check{G}$, on a*
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}}\big(V\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))\big) \cong \mathbf{\Pi}(V)'\otimes_L \mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$
2. *Dans tous les autres cas*
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}}\big(V\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))\big) = 0.$$

Remarque 1.2. — • Pour $\mathrm{Sym}^0\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}(1) \cong \mathbb{Q}_p(1)$ (i.e pour les coefficients constants) ce résultat a été démontré dans [**14**]. Ce théorème répond à la question posée dans [**14**, Remarque 0.3(ii)] ; une différence importante est ce qui se passe en niveau 0 où on voit apparaître des représentations spéciales irréductibles au lieu de caractères. Le traitement de ce cas utilise des techniques dérivées comme on l'explique au paragraphe 1.2.3.

- On retrouve le fait frappant de [**14**, Remarque 0.3(i)] que la cohomologie étale du système local $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))$ est de Hodge-Tate avec les poids attendus, comme si $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ était une courbe algébrique.
- On se restreint ici aux poids positifs mais en tordant le système local par une puissance négative du caractère cyclotomique ou en considérant les puissances symétriques du dual de $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}$ on pourrait supprimer cette hypothèse.
- En suivant [**16**], il est probablement possible de déterminer la structure complète du $G\times\check{G}\times\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}$-module $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))$ sous la forme d'une décomposition factorisée à la Emerton (cf. [**26**]). Nous espérons y revenir dans un travail ultérieur.

La structure de la preuve est similaire à celle de [**14**] sauf dans le cas spécial (cf. la section 12) ; une différence essentielle est que l'on doit remplacer les théorèmes de comparaison pour les coefficients triviaux par des théorèmes de comparaison pour les systèmes locaux (nos systèmes locaux sont très particuliers, ce qui nous permet de nous rattacher au cas des coefficients triviaux plutôt que de prouver un théorème de comparaison à partir de zéro). Les étapes sont les suivantes :

- La flèche naturelle $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)) \hookrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{pét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))$ identifie la cohomologie étale au sous-espace des vecteurs G-bornés ; en particulier, cette flèche est injective. Symboliquement, on écrira

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)) \cong \mathrm{H}^1_{\text{pét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))^{G\text{-b}}. \tag{1.1}$$

L'argument est très similaire à celui pour les coefficients triviaux (cf. [**14**, Proposition 2.12]), sur lequel il repose, mais une petite différence est que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr}}(1))$ contient de la torsion.

- On a une décomposition du L-système local

$$\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}} = \bigoplus_{b>a\geqslant 0} \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]} \otimes_L \underline{\check{W}}_{a,b}, \tag{1.2}$$

  obtenue à partir de la combinatoire des foncteurs de Schur. Dans cette décomposition, les $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ sont des L-systèmes locaux G-équivariants sur lesquels $\check{G}$ opère trivialement. On obtient donc une décomposition similaire de la cohomologie proétale.
- Les L-systèmes locaux $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ sont des *opers p-adiques isotriviaux*, ce qui permet de décrire leur cohomologie proétale en termes de formes différentielles et de la relier aux cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato de l'espace. Ce *diagramme fondamental* reliant les différentes cohomologies sera décrit plus en détail dans la section 1.4.1 de l'introduction.

Le premier point nous ramène à calculer $\mathrm{Hom}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}}\big(V\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(\check{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)$ dont on considère ensuite les vecteurs G-bornés pour obtenir le premier point du théorème 1.1. Le calcul de cette multiplicité dans la cohomologie proétale est extrêmement différent dans le cas spécial et cuspidal. Pour le second point du théorème 1.1, on suit l'argument de [**16**, Théorème 5.10] qui est un peu moins technique que la preuve de [**14**, Théorème 2.15]. Cet argument repose sur une variante du théorème 1.1 où on calcule une multiplicité G-équivariante plutôt que galoisienne (théorème 1.3 ci-dessous). De plus, ce théorème est une étape essentielle dans le calcul de la multiplicité d'une représentation spéciale dans la cohomologie proétale. Si Π est une L-représentation unitaire de Banach de G de longueur finie, on note $\mathbf{V}(\Pi)$ la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ qui lui est associée par le foncteur $\mathbf{V}$ de Colmez (cf. [**10**]). Supposons que Π est telle que ses vecteurs localement algébriques s'écrivent

$$\Pi^{\mathrm{lalg}} \cong W \otimes_L \Pi^{\infty},$$

où W est une L-représentation algébrique de G et Π^{∞} une L-représentation lisse de G, alors on dit que

- Π est *supercuspidale* (ou cuspidale) si Π^{∞} n'est pas nul et cuspidale ; ceci est équivalent à ce que $\mathbf{V}(\Pi)$ soit supercuspidale,
- Π est *spéciale* si Π^{∞} est une représentation de Steinberg.

En particulier, si Π est spéciale ou cuspidale, alors $\Pi^{\mathrm{lalg}} \neq 0$ et donc $\mathbf{V}(\Pi)$ est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts.

Théorème 1.3. — *Soit Π une L-représentation de Banach unitaire de G absolument irréductible.*

1. *Si Π est spéciale ou cuspidale,*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t}}\big(\check{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) \cong \mathbf{V}(\Pi)\otimes_L \mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(\mathbf{V}(\Pi)).$$

2. *Dans tous les autres cas,*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t}}\big(\check{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = 0.$$

Le calcul dans le cas cuspidal est à peu de choses près le même que celui de [**14**]. Premièrement, la cohomologie de Hyodo-Kato de la tour est décrite dans [**14**]. À partir de [**23**], on utilise un argument de changement de poids expliqué dans [**12**] pour obtenir la conjecture de Breuil-Strauch en poids supérieurs, ce qui permet de décrire le complexe de de Rham associé à $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ en tant que représentation de $G\times\check{G}$. Le calcul se fait ensuite à partir du diagramme fondamental.

1.2.3. *Le cas spécial.* — Le calcul dans le cas spécial est très différent.

Tout d'abord, on utilise le résultat de la thèse de Schraen (cf. [**46**]) pour obtenir la multiplicité dérivée du dual des vecteurs localement analytiques d'une représentation de la forme $\mathbf{\Pi}(V)$, pour V une représentation spéciale, dans le complexe de de Rham. Définissons cette catégorie dérivée. On note $\mathscr{D}(G,L)$ l'anneau des distributions localement analytiques sur G à coefficients dans L et on considère la catégorie dérivée des $\mathscr{D}(G,L)$-modules à caractère central fixé ; on note alors **Hom** les homorphismes dans cette catégorie dérivée.

Pour Π une L-représentation de G on note Π^{lan} la sous-représentation des vecteurs localement analytiques et $(\Pi^{\mathrm{lan}})'$ son dual stéréotypique, qui est un $\mathscr{D}(G,L)$-module. On note $(\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]$ l'objet de cette catégorie dérivée concentré en degrée 1 et on note $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ le complexe de de Rham de la tour de Drinfeld associé au système local ; ce complexe définit un élément de la catégorie dérivée en question. La version du résultat de Schraen que l'on démontre est la suivante.

Proposition 1.4. — *Soit V une L-représentation spéciale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Alors, on a un isomorphisme de (φ,N)-modules filtrés munis d'une action de $\breve{G}$*

$$\mathbf{Hom}\,\big((\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)\cong\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)\otimes_L\mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$

Remarque 1.5. — • La structure de (φ,N)-module filtré sur l'entrelacement dérivé provient du complexe de de Rham. L'isomorphisme de Hyodo-Kato munit le complexe de de Rham d'une structure de (φ,N)-module filtré (dérivé) et la filtration est la filtration de de Rham.

- On sait, entre autres, que le sous-espace $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}\subset\mathbf{\Pi}(V)$ n'est pas nul, et même dense, d'après les travaux de Schneider-Teitelbaum (cf. [**43**]).
- L'action de $\breve{G}$ apparaît ici naturellement contrairement à [**46**]. Par ailleurs, la partie algébrique provient du système local, et considérer la tour $\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}$ plutôt que le demi-plan permet d'obtenir les torsions par les caractères lisses de $\breve{G}$.
- En réalité, ce ne sont pas vraiment les vecteurs localement analytiques de $\mathbf{\Pi}(V)$ qui apparaissent dans les calculs de Schraen mais une représentation plus petite. Lorsque V est spéciale, $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$ a 4 composantes de Jordan-Hölder. Schraen considère une L-représentation de G faisant intervenir 3 de ces 4 composantes et on montre que la dernière composante (une série principale analytique) n'intervient pas dans la cohomologie, ce qui permet d'adapter le résultat comme déjà annoncé dans [**46**, Remarque 5.5].

On utilise le théorème de comparaison proétale-syntomique pour les coefficients isotriviaux pour se ramener à un calcul syntomique (le complexe syntomique est construit à partir du complexe de Hyodo-Kato et du complexe de de Rham par une version dérivée de la recette de Fontaine (cf. [**18**]) pour construire une représentation galoisienne à partir d'un (φ,N)-module filtré). On déduit de la proposition 1.4 le résultat suivant :

Théorème 1.6. — *Soit V une L-représentation spéciale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$,*

$$\mathbf{Hom}\,\big(\big(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}\big)'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)\cong V\otimes_L\mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$

Enfin, en considérant les vecteurs G-bornés et en invoquant (1.1), on obtient le théorème suivant, où **Hom** est cette fois considéré dans la catégorie dérivée des $L[G]$-modules topologiques à caractère central fixé :

Théorème 1.7. — *Soit V une L-représentation spéciale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$,*

$$\mathbf{Hom}\,\big(\mathbf{\Pi}(V)'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)\cong V\otimes_L\mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$

Remarque 1.8. — • Si $b\geqslant a+2$ on a

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)=0,$$

et dans ce cas le premier point du théorème 1.3 est équivalent au théorème 1.7.

- Si $b=a+1$, ce qui correspond au cas des coefficients triviaux (à torsion près par un caractère), le théorème 1.7 est un analogue d'un résultat de Dat (cf. [**20**]) selon lequel les représentations réductibles sont encodées dans le complexe et pas dans les différents groupes de cohomologie. On obtient donc un renforcement de [**14**] puisque les méthodes dérivées font sortir des représentations réductibles de la bonne dimension au lieu des caractères.

1.3. Systèmes locaux isotriviaux et opers p-adiques sur les courbes Stein

Discutons maintenant de la première partie de cette thèse, qui concerne les systèmes locaux sur les espaces rigides. La cohomologie des systèmes locaux sur les espaces rigides a réputation d'être particulièrement pathologique. L'un des problèmes que l'on rencontre est l'absence d'une cohomologie syntomique à coefficients. Pour y remédier, on introduit la notion de système local isotrivial que l'on va détailler dans un instant. On expliquera ensuite comment définir une cohomologie syntomique pour ces systèmes locaux que l'on compare à la cohomologie proétale pour les espaces Stein. Finalement, on contourne les difficultés posées par la filtration en utilisant la notion d'oper sur les courbes et c'est dans ce contexte que l'on généralise [**15**].

On note $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau des périodes de de Rham et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \coloneqq \mathrm{Frac}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ son corps des fractions. C'est un anneau filtré muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. La filtration est donnée par une uniformisante $t \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui est définie à partir de $\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots)$, une suite compatible de racines p^n-ièmes de l'unité, par $t = \log([\varepsilon])$. De même, $\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+$ désigne l'anneau des périodes cristallines : il est muni d'un Frobenius φ et d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On a $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+[u]$ et on étend le Frobenius par $\varphi(u) = pu$ et on définit la monodromie par $N(u) = -1$. On définit le morphisme $\iota\colon \mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \hookrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par $u \mapsto u_p = \log([p^\flat]/p)$ et ce plongement munit $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+$ d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Pour simplifier les notations, pour tout entier $k \geqslant 0$, on note simplement $\mathrm{B}_k \coloneqq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^k$. Ces anneaux admettent des versions faisceautiques pour la topologie proétale qui sont définies dans [**44**] et que l'on utilisera librement dans ce texte.

1.3.1. *Systèmes locaux isotriviaux.* — Soit O_K un anneau à valuation discrète complet de caractéristique mixte. On note
- K son corps des fractions,
- $k \coloneqq \mathrm{O}_K/\mathfrak{m}_K$ son corps résiduel que l'on suppose parfait,
- $K_0 \subset K$ la sous-extension maximale non-ramifiée.

Soit X un schéma faiblement formel semi-stable sur O_K, on note X_K l'espace surconvergent associé que l'on suppose lisse et X_k la fibre spéciale de X. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local proétale sur X_K que l'on suppose de Rham. D'après Scholze et Brinon (cf. [**44**] et [**8**]), on associe à $\mathbb{V}$ un *fibré plat filtré* $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ où
- $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X_K,
- ∇ est une connexion plate,
- $\mathrm{Fil}^\bullet$ est une filtration décroissante, finie, séparée et exhaustive, satisfaisant à la transversalité de Griffiths pour ∇.

On note $\mathbb{B}_{\mathrm{cr}} \coloneqq \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K}$ le faisceau proétale des périodes cristallines sur X_K. On dit alors que $\mathbb{V}$ est *isotrivial cristallin* s'il existe un φ-module D sur K_0 et un isomorphisme φ-équivariant de faisceaux proétales sur X_K,
$$\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}} \cong D \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}}.$$
Dans ce cas, $\mathcal{E} \cong D \otimes_{K_0} \mathcal{O}_{X_K}$ et donc les seules données qui varient sont la filtration et la connexion sur $\mathcal{E}$. Sous l'isomorphisme $\mathcal{E} \cong D \otimes_{K_0} \mathcal{O}_{X_K}$, si la connexion prend la forme $\nabla = \mathrm{id} \otimes d$, on dit que le système local est *fortement isotrivial.* L'intérêt est que les systèmes locaux universels sur les espaces de Rapoport-Zink sont fortement isotriviaux : c'est une réinterprétation d'un théorème de Rapoport et Zink (cf. [**41**, Proposition 5.15]). En particulier, ce sont ces exemples qui ont motivé notre définition d'isotrivial. On démontre que les systèmes locaux isotriviaux forment une catégorie Tannakienne pour le foncteur fibre $\mathbb{V} \rightsquigarrow D$, ce qui permet de considérer des produits tensoriels et des foncteurs de Schur de systèmes locaux isotriviaux.

Pour associer une suite exacte fondamentale à $\mathbb{V}$, on définit le faisceau proétale
$$\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \coloneqq \big(D \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=1},$$
que l'on peut voir comme un espace de Banach-Colmez relatif. Pour la partie de Rham, on a le faisceau des périodes $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et on a déjà mentionné la construction de Scholze et Brinon $\mathbb{V} \rightsquigarrow (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$. À partir de là, on peut définir le faisceau proétale
$$\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) \coloneqq D \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}},$$

qui est muni d'une filtration introduite par celle de $\mathcal{E}$ et que l'on peut définir à partir de $\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, le gros faisceau des périodes. On insiste que cette filtration n'est pas induite par la filtration triviale sur D. On a une inclusion $\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \hookrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})$.

Proposition 1.9. — *Soit $\mathbb{V}$ un système local étale p-adique fortement isotrivial sur X_K. Soit D le φ-module sur K_0 associé à $\mathbb{V}$ et $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})$ le fibré plat filtré associé à $\mathbb{V}$. Alors, on a une suite exacte de faisceaux proétales sur X_K*

$$0 \to \mathbb{V} \to \mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})/\mathrm{Fil}^0 \to 0.$$

On a une réciproque à ce théorème, qui permet de construire des systèmes locaux isotriviaux de la même manière que l'on peut construire des représentations galoisiennes en suivant Colmez-Fontaine (cf. [**18**]). Dans le cas des représentations galoisiennes, on rappelle que la filtration doit être faiblement admissible pour produire un espace de dimension finie, donc il est naturel d'imposer cette condition en chaque point géométrique pour les systèmes locaux.

Proposition 1.10. — *Soit D un φ-module sur K_0 de dimension finie et soit $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})$ un fibré vectoriel sur X_K tel que $\mathcal{E} = D \otimes_{K_0} \mathcal{O}_{X_K}$ et tel que $\nabla = \mathrm{id} \otimes d$. Supposons de plus qu'en tout point géométrique $\bar{x}\colon \mathrm{Spa}(C, C^+) \to X_K$, la filtration induite par $\mathrm{Fil}^{\bullet}$ sur $\mathcal{E}(\bar{x}) = D \otimes_{K_0} C$ est faiblement admissible. Alors,*

$$\mathbb{V} := \mathrm{Ker}\left[\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})/\mathrm{Fil}^0\right]$$

est un système local proétale isotrivial de φ-module associé D et de fibré plat filtré associé $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})$.

Si on interprète un $\mathbb{Q}_p$-système local comme une variation de représentations galoisiennes p-adiques on peut résumer les deux théorèmes en disant qu'une variation de représentations galoisiennes p-adiques d'isocristal constant est équivalente à une variation de filtration, ce qui fournit un analogue p-adique des variations de structures de Hodge.

1.3.2. *Cohomologie syntomique géométrique.* — On garde les notations précédentes et on considère $\mathbb{V}$ un système local proétale fortement isotrivial sur X_K à poids de Hodge-Tate positifs(1), de φ-module associé D et de fibré plat filtré $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^{\bullet})$. Dans tous les cas on peut définir un complexe de de Rham $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)$ qui est naturellement filtré, puis l'isotrivialité forte donne un isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K) \otimes_{K_0} D.$$

Prenons garde que cet isomorphisme n'est pas filtré. Le complexe $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k)$ est muni d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie. On peut définir le *complexe de Hyodo-Kato isotrivial*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big) := \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k) \otimes_{K_0} D,$$

muni du Frobenius produit et de l'opérateur de monodromie provenant de $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k)$. On récupère gratuitement un isomorphisme de Hyodo-Kato isotrivial à partir de l'isomorphisme de Hyodo-Kato usuel, i.e.

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big) \otimes_{K_0} K \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big).$$

À partir de là, on est en mesure de définir un complexe syntomique en suivant [**15**] comme la fibre

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}\big) := \left[\left[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\right]^{N=0,\varphi=1} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^0\right].$$

Cette cohomologie s'inscrit donc naturellement dans un diagramme que l'on décrira au paragraphe suivant, en particulier elle est calculable : on peut la comparer à la cohomologie proétale du système local, ce qui donne une méthode pour la calculer. Le théorème de comparaison que l'on obtient est le suivant :

(1) Ceci signifie que les sauts de la filtration sont en degrés négatifs.

Théorème 1.11. — *Supposons que X_K soit propre, quasi-compact ou Stein. Soit $i \geqslant 0$ un entier. Il existe, dans*[2] $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$ *un morphisme*

$$\alpha_{\mathbb{V}(i)} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big),$$

qui est un quasi-isomorphisme strict après troncation par $\tau_{\leqslant i}$. En particulier, on a des isomorphismes topologiques

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big) \cong \mathrm{H}^j_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big),$$

pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant i$.

Dans le cas propre, on déduit ce théorème des théorèmes de comparaison de Scholze (cf. [**44**]) et dans les autres cas des théorèmes de Bosco (cf. [**4**] et [**5**]). On pourrait cependant suivre la trame de [**3**] et [**9**] (ou encore [**1**]) en commençant par des calculs locaux avant de recoller.

1.3.3. *Le diagramme fondamental.* — On suppose maintenant que X_K est une courbe affine ou Stein géométriquement connexe. On rappelle et on introduit quelques notations :

- pour H un φ-module et $k \in \mathbb{Z}$, on note $H[k]$ le φ-module obtenu à partir de H en multipliant l'endomorphisme de Frobenius par p^k,
- pour H un (φ, N)-module sur K_0 et $k \in \mathbb{Z}$ un entier on note

$$X^k_{\mathrm{st}}(H) = \big(H \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi = p^k, N=0},$$

- on note

$$D_K \coloneqq D \otimes_{K_0} K, \quad \Omega^1_{\mathcal{E}} \coloneqq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \Omega^1, \quad \mathrm{B}_k \coloneqq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/t^k, \quad k \geqslant 0.$$

Commençons par énoncer la forme générale du diagramme, dont l'aspect peu ragoutant motivera l'introduction d'hypothèses supplémentaires.

Proposition 1.12. — *Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local fortement isotrivial d'isocristal associé D et de fibré associé $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons que les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}$ sont tous positifs et notons a le plus petit poids de Hodge-Tate. On a une application naturelle entre suites exactes strictes :*

$$\begin{tikzcd}
X^1_{\mathrm{st}}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K, \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
D_K \otimes_K \mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K \mathrm{B}_{a+1} \arrow[r, "\nabla\otimes\mathrm{id}"] & \Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K \mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K \mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, on a noté

$$\mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K, \mathcal{E}) \coloneqq \mathrm{Ker}\left(\frac{\mathcal{E}(X_K) \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}{\mathrm{Fil}^1} \to \frac{\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K) \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}{\mathrm{Fil}^0}\right),$$

$$X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)^0 \coloneqq \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p, N=0} \cap \mathrm{Fil}^0\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$

Le problème majeur dans ce diagramme est le terme $\mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K, \mathcal{E})$ qui est difficile à expliciter sans hypothèses supplémentaires ; il fait intervenir les connexions induites sur les gradués. Notons $\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ le fibré plat filtré associé au système local $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ apparaissant dans la décomposition (1.2). Schneider-Stuhler (cf. [**42**, 5]) calculent les connexions induites sur les gradués de $\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ et montrent que ce sont des isomorphismes sur les gradués intermédiaires. Cette condition apparaît dans la littérature sous le nom *d'oper*, formalisée par Beilinson-Drinfeld (cf. [**2**]), fondamentale dans la correspondance de Langlands géométrique : les opers permettent par exemple de décrire le centre de l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Kac-Moody.

[2] On note C_K la catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes sur K et $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$ la ∞-catégorie associée.

D'après Beilinson-Drinfeld, si $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ est un oper de poids (a, b) (ces entiers correspondent aux sauts extrémaux de la filtration) on lui associe un couple de fibrés en droites, muni d'un opérateur différentiel d'ordre $b - a + 1$ soit[(3)] $(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}, \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}, L_\nabla)$; alors, si on définit

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) := \big(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E} \xrightarrow{L_\nabla} \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}\big),$$

muni de la filtration induite, on a un quasi-isomorphisme filtré $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)$. Pour $\underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ ce complexe est introduit dans [**42**, 5] sous le nom de *complexe de de Rham réduit* et Schneider-Stuhler montrent le quasi-isomorphisme filtré dans ce cas.

Si $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$, associé à un système local $\mathbb{V}$, est un oper on dit simplement que $\mathbb{V}$ est un $\mathbb{Q}_p$*-oper*. Dans cette situation, on peut expliciter le terme $\mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K, \mathcal{E})$ et le diagramme fondamental prend alors la forme suivante :

Proposition 1.13. — *Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-oper de poids (a, b) fortement isotrivial d'isocristal associé D et de fibré associé $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons que $a \geqslant 0$. Avec les mêmes notations que précédemment, on a une application naturelle entre suites exactes strictes :*

$$\begin{tikzcd}
t^a X^1_{\mathrm{cr}}(D[a]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d] & t^a X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)[a]\big) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
D_K \otimes_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r, "L_\nabla"] & \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.14. — • Sous cette forme, le diagramme est plus proche de celui pour les coefficients triviaux démontré dans [**15**].

- Il n'est pas tout à fait clair comment obtenir un diagramme similaire pour les espaces Stein de dimension supérieure par la même méthode. En particulier, il n'y a pas de notion canonique d'oper au delà des courbes, même si on trouve des propositions dans la littérature.
- Une différence avec le cas des coefficients triviaux est que les images de $t^a X^1_{\mathrm{cr}}(D[-a])$ et $D_K \otimes_K t^a\mathrm{B}_{b+1}$ par les flèches horizontales de gauche ne sont pas forcément les mêmes. C'est cette différence qui explique la différence du traitement du cas spécial.

1.4. La cohomologie proétale de l'espace de Drinfeld. — Pour finir cette introduction on va présenter ce que donnent les calculs de la section précédente dans le cas de l'espace de Drinfeld avant de discuter comment l'invariant $\mathcal{L}$, qui encode la filtration, apparaît dans ce diagramme. Pour le diagramme, on commence par considérer ${}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ du quotient $\breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},\breve{\mathbb{Q}}_p}/p^{\mathbb{Z}}$; on note ${}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C} := {}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. On se restreint au système local $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ sur ${}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ où on a fixé $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$. Comme évoqué plus haut, c'est un L-oper isotrivial de poids $(a, b-1)$. On rappelle que l'on note $\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ le fibré plat filtré associé à $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$, $\underline{\Omega}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}} := \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_{{}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}}$ et de plus

$$\omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b] := \mathrm{Gr}_a\underline{\Omega}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}), \quad \mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b] := \mathrm{Gr}_{b-1}\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}).$$

Ces notations sont motivées par l'idée que $\mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b]$ et $\omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b]$ sont respectivement les fonctions et les formes différentielles rigides analytiques sur la tour mais où l'action de G est tordue par un facteur d'automorphie. Dans le cas spécial, à torsion par un caractère lisse près, seule la restriction de ces faisceaux à $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ intervient. On note simplement

$$\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] := \mathrm{Gr}_a\underline{\Omega}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}), \quad \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] := \mathrm{Gr}_{b-1}\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}).$$

De plus, l'isomorphisme de Morita s'écrit $\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] \cong \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)'$ où $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}$ est une Steinberg localement analytique. On considère les vecteurs localement algébriques $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b} \hookrightarrow \underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}$ dont la surjection duale correspond alors à la surjection sur la cohomologie de de Rham de $\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$, i.e.

$$\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)' \to \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)' \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}\,;\,\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}\big).$$

[(3)] Gr_i désigne ici le $(-i)$-ième gradué. On a préféré cette convention pour éviter d'alourdir tous les indices avec un signe $-$ redondant.

Le soulignement désigne simplement que l'on a tordu ces L-représentations par une puissance de la norme adaptée, de sorte à les rendre unitaires.

1.4.1. *Le diagramme fondamental pour l'espace de Drinfeld.* — On fixe M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module de rang 2 qui est spécial ou cuspidal. Au début de la sous-section 1.2, on a défini $\mathrm{LL}^{\mathrm{lalg}}(V)$ pour V une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ mais cette construction ne dépend que des poids et du L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$; ainsi on définit la L-représentation localement algébrique de $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}$ de G par la même recette. De même, on a $\mathrm{JL}(M)$, la L-représentation lisse de $\check{G}$ obtenue par la correspondance de Jacquet-Langlands ; on ne considère pas la représentation localement algébrique puisque on a déjà traité la partie algébrique à l'aide de (1.2). On définit un foncteur sur les $L[\check{G}]$-modules

$$X \longmapsto X[M] := \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M)\,,\,X\big),$$

que l'on va appliquer au diagramme pour traiter la partie $\check{G}$-équivariante. De plus, on note

$$\breve{M} := M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \breve{\mathbb{Q}}_p,\;\; M_{\mathrm{dR}} := \big(M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} C\big)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}.$$

Alors M_{dR} est un L-module libre de rang 2. Pour alléger le diagramme dans le cas spécial on note pour $k \in \mathbb{N}$ l'espace de Banach-Colmez

$$\mathrm{U}_{k,2} := \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^{+}\big)^{\varphi^2 = p^k},$$

qui est naturellement un $\mathrm{U}_{0,2} \cong \mathbb{Q}_{p^2}$-espace vectoriel où $\mathbb{Q}_{p^2}$ est l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.

Théorème 1.15. — *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $0 \leqslant a < b$ et soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module de rang 2 qui est spécial ou cuspidal.*

- *Si M est cuspidal on a un diagramme commutatif à lignes exactes d'espaces de Fréchet $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \times G$-equivariants*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^{\infty}[a,b][M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}^{\infty}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}\big)[M] \arrow[r] \arrow[d, hook] & t^a X_{\mathrm{st}}^{b-a}(\breve{M})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^{\infty}[a,b][M] \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega_{\mathrm{Dr}}^{\infty}[a,b][M] \arrow[r] & (t^a\mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- *Si M est spécial, alors $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\breve{\mathrm{M}}_{\mathrm{Dr},C}^{\infty}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}\big)[M] \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}\big) \otimes \chi_M$, où χ_M, est le caractère de $G \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$ défini par M et on a*

$$\begin{tikzcd}
 & t^a\mathrm{U}_{b,2} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \underline{W}_{a,b} \arrow[r] \arrow[d, hook] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^{0}[a,b] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\Omega_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}\big) \arrow[r] \arrow[d] & t^a\mathrm{U}_{b-1,2}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_{p^2}}\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b} \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^{0}[a,b] \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)' \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De plus, dans les deux diagrammes, les flèches verticales sont d'images fermées.

Remarque 1.16. — Dans cette thèse on a fait le choix de se restreindre à $\mathbb{Q}_p$ plutôt qu'une extension finie $F/\mathbb{Q}_p$. Dans [**14**], le diagramme fondamental ci-dessus pour les coefficients triviaux est établi pour une extension finie $F/\mathbb{Q}_p$.

1.4.2. *L'invariant $\mathcal{L}$.* — À partir du L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module M et d'une filtration sur M_{dR} on peut reconstruire la représentation V par la recette de Fontaine. Comme on est en rang 2, cette filtration est caractérisée par deux poids et une droite dans M_{dR} que l'on appelle *l'invariant $\mathcal{L}$ galoisien.* Côté automorphe, cet invariant n'apparaît pas directement dans $\mathbf{\Pi}(V)$ mais dans $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$: cette représentation localement analytique est réductible et les extensions entre les constituants de Jordan-Hölder sont caractérisées par un paramètre que l'on appelle *l'invariant $\mathcal{L}$ automorphe.* On peut retrouver $\mathbf{\Pi}(V)$ à partir de $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$ en prenant son complété unitaire universel.

Dans le cas cuspidal, $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$ a deux constituants de Jordan-Hölder : le socle est constitué des vecteurs localement algébriques, i.e. $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}$ et le cosocle est le dual de $\mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^{\infty}[a,b][M]$. L'extension entre ces deux composantes est paramétrée par l'invariant $\mathcal{L}$ automorphe. Dans la ligne du bas du premier diagramme du théorème 1.15 on voit apparaître le dual de l'extension universelle et il s'agit de montrer que lorsqu'on fixe une droite $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$, l'extension obtenue est exactement celle de paramètre $\mathcal{L}$ (cf. Proposition 11.11).

Dans le cas spécial, $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$ a quatre constituants de Jordan-Hölder dont une série principale qui ne joue aucun rôle. La représentation $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lan}}$ est complètement déterminée par son invariant $\mathcal{L}$ automorphe i.e. une droite de l'espace $\mathrm{Ext}^1_G\big(\underline{W}^*_{a,b}\,,\,\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)$ qui est de dimension 2. Dans le second diagramme du théorème 1.15 le dual de l'extension universelle apparaît dans la flèche horizontale du milieu i.e. deux copies du dual de $\underline{W}^*_{a,b}$ apparaissent dans le noyau de l'application

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\Omega_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}\big) \to t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)'.$$

Dans cette extension fournie par la cohomologie, il s'agit d'identifier l'invariant $\mathcal{L}$ automorphe à l'invariant $\mathcal{L}$ galoisien (cf. théorème 12.17).

1.5. Plan de la thèse

Cette thèse est constituée de deux parties faisant appel à des techniques indépendantes : la première traite des systèmes locaux isotriviaux sur les espaces rigides et leur cohomologie ; la seconde concerne le calcul de la cohomologie étale et proétale de la tour de Drinfeld à coefficients dans le système local universel.

La première partie est constituée de cinq sections :

- la section 2. est consacrée à des rappels sur les systèmes locaux étales p-adiques sur les espaces rigides,
- dans la section 3. on définit les systèmes locaux (fortement) isotriviaux et on montre les propositions 1.9 et 1.10 puis on décrit l'exemple des groupes p-divisibles sur les espaces de Rapoport-Zink,
- la section 4. est consacrée aux cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato isotriviales,
- dans la section 5. on définit la cohomologie syntomique et on démontre les diagrammes fondamentaux des propositions 1.12 et 1.13 pour la cohomologie syntomique,
- dans la section 6. on démontre le théorème de comparaison 1.11 et on calcule la cohomologie proétale d'un oper sur la droite affine et sur le groupe multiplicatif en guise d'exemples d'applications.

La seconde partie est constituée de sept sections :

- dans la section 7. on fait quelques rappels sur la tour de Drinfeld et le système local universel,
- la section 8. est consacrée à des rappels sur les représentations de G et $\check{G}$: les représentations algébriques, les représentations de Steinberg et la série spéciale localement analytique ; on démontre aussi la décomposition (1.2),
- dans la section 9. on réinterprète les calculs de Schneider-Stuhler et on établit en partie le théorème 1.15,
- on démontre l'isomorphisme (1.1) dans la section 10.,
- dans la section 11., on démontre le cas cuspidal du théorème 1.15 avant de calculer la multiplicité des représentations supercuspidales dans la cohomologie proétale du système local ; on en déduit le cas cuspidal des théorèmes 1.1 et 1.3,
- dans la section 12., on démontre le cas spécial des théorèmes 1.1 et 1.3 en suivant ce qu'on a expliqué dans le paragraphe 1.2.3,
- la section 13. est consacrée à la preuve du second point du théorème 1.1, ce qui complète sa démonstration.

PARTIE I. COHOMOLOGIE P-ADIQUE À COEFFICIENTS ISOTRIVIAUX

Soit O_K un anneau à valuation discrète complet de caractéristique mixte. On note $\mathfrak{m}_K \subset \mathrm{O}_K$ son idéal maximal, $k \coloneqq \mathrm{O}_K/\mathfrak{m}_K$ son corps résiduel que l'on suppose parfait, K son corps des fractions et $\pi \in \mathfrak{m}_K$ une uniformisante de K. On note de plus $\mathrm{O}_{K_0} \coloneqq \mathrm{W}(k)$ où W est le schéma en anneaux sur $\mathbb{Z}$ des vecteurs de Witt. Son idéal maximal est engendré par $p \in \mathrm{O}_{K_0}$ et son corps résiduel est k. On note K_0 son corps des fractions. On suppose que la valuation sur K est la valuation p-adique $v_p \colon K^\times \to \mathbb{Q}$, normalisée par $v_p(p) = 1$. On note $C = \widehat{\overline{K}}$ le complété d'une clôture algébrique de K. L'anneau des entiers de C est O_C et l'idéal maximal $\mathfrak{m}_C$. Le corps résiduel $k_C = \mathrm{O}_C/\mathfrak{m}_C$ est algébriquement clos.

On renvoit à [**15**, 3.1.1] pour des rappels et des références concernant la géométrie surconvergente. Soit X un schéma faiblement formel sur O_K, on note X_K l'espace surconvergent associé et $X_C \coloneqq X \otimes_K C$ son extension des scalaires à C. On supposera toujours que X_K est lisse sur K. On note $\widehat{X}$ son complété p-adique qui est un schéma formel sur O_K et $\widehat{X}_K$ l'espace rigide associé sur K. De même, on note $\widehat{X}_C \coloneqq \widehat{X}_K \otimes_K C$ l'extension des scalaires. Finalement, on notera $X_k \coloneqq X \otimes_{\mathrm{O}_K} k$ la fibre spécial de X, qui est un schéma sur k.

On note C_K la catégorie des K-espaces vectoriels localement convexes, dont on rappelle que c'est une catégorie semi-abélienne. Rappelons qu'un morphisme est dit *strict* s'il est relativement ouvert. On note $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$ la ∞-catégorie dérivée bornée à gauche associée, construite à partir de la catégorie des complexes $\mathscr{C}(\mathrm{C}_K)$, et on note $\mathrm{D}(\mathrm{C}_K)$ la catégorie homotopique de $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$. On renvoit à [**15**, 2.1] pour plus de détails sur ces objets que l'on utilisera librement, faisons néanmoins quelques rappels. Pour $E^\bullet = (\cdots \to E^{n-1} \xrightarrow{d_n} E^n \to \cdots) \in \mathscr{C}(\mathrm{C}_K)$, on définit les foncteurs de troncations usuelles et bêtes sur $\mathscr{C}(C_K)$ par

$$\begin{aligned}
\tau_{\leqslant n} E^\bullet &\coloneqq \cdots \to E^{n-2} \to E^{n-1} \to \ker(d_n) \to 0 \to \cdots \\
\tau_{\geqslant n} E^\bullet &\coloneqq \cdots \to 0 \to \mathrm{coim}(d_{n-1}) \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots \\
\sigma_{\leqslant n} E^\bullet &\coloneqq \cdots \to E^{n-2} \to E^{n-1} \to 0 \to 0 \to \cdots \\
\sigma_{\geqslant n} E^\bullet &\coloneqq \cdots \to 0 \to 0 \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots .
\end{aligned}$$

On dit que $E^\bullet$ est *strict* si ses différentiels, les d_n, sont strictes et on dit qu'un morphisme de $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$ est un *quasi-isomorphisme strict* si son cône est strict et exacte. On définit la *cohomologie algébrique* de $E^\bullet$ comme la cohomologie usuelle $\mathrm{H}^i(E^\bullet)$ dans la catégorie des K-espaces vectoriels ; elle sera munie de la topologie sous-quotient si nécessaire. On définit le complexe $\widetilde{\mathrm{H}}^i(E^\bullet) \coloneqq \tau_{\leqslant i}\tau_{\geqslant i}(E^\bullet) = (\mathrm{coim}(d_{n-1}) \to \ker(d_n))$. Précisons la catégorie d'arrivé de ce foncteur (cf. [**15**, 2.1.1]). Les foncteurs de troncations $(\tau_{\leqslant n}, \tau_{\geqslant n})$ définissent une t-structure sur $\mathrm{D}(C_K)$. Le coeur à gauche de cette t-structure sera noté $\mathrm{LH}(\mathrm{C}_K)$: tout objet de $\mathrm{LH}(\mathrm{C}_K)$ est représenté, à équivalence près, par un monomorphisme $f \colon E \to F$ où F est en degré 0. On a un plongement naturel $I \colon C_K \hookrightarrow \mathrm{LH}(\mathrm{C}_K)$ donné par $E \mapsto (0 \to E)$ et qui induit une équivalence $\mathrm{D}(\mathrm{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}(\mathrm{LH}(\mathrm{C}_K))$ compatible à la t-structure. Ces t-structures se relèvent au niveau des dg catégorie dérivée ce qui promeut l'équivalence précédente en une équivalence $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}(\mathrm{LH}(\mathrm{C}_K))$. Réciproquement, on a le foncteur *partie classique* $C \colon \mathrm{LH}(\mathrm{C}_K) \to \mathrm{C}_K$ qui envoie un monomorphisme $f \colon E \to F$ sur $\mathrm{coker}(f)$. Le foncteur $\widetilde{\mathrm{H}}^i$ s'interprète alors comme un foncteur $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}(\mathrm{LH}(\mathrm{C}_K))$. On remarque que $C\widetilde{\mathrm{H}}^i = \mathrm{H}^i$ et on a un épimorphisme naturel $\widetilde{\mathrm{H}}^i \to I\mathrm{H}^i$. Si l'évaluation en $E^\bullet$ de cet épimorphisme, i.e. $\widetilde{\mathrm{H}}^i(E^\bullet) \to I\mathrm{H}^i(E^\bullet)$, est un isomorphisme, alors on dit que la cohomologie $\widetilde{\mathrm{H}}^i(E^\bullet)$ est *classique*.

Pour la définition et les propriétés du produit tensoriel complété dérivé à droite $\widehat{\otimes}_K^R$ on renvoit à [**15**, 2.1.5].

2. Systèmes locaux

2.1. Systèmes locaux

2.1.1. *Systèmes locaux étales.* — Dans ce paragraphe on travaille sur le site étale $X_{K,\text{ét}}$ d'un espace surconvergent, d'un espace rigide ou d'un schéma sur K que l'on supposera lisse. Le topos des faisceaux sur $X_{K,\text{ét}}$ sera noté $\operatorname{Shv}(X_{K,\text{ét}})$ et pour Λ un anneau on note $\operatorname{Shv}(X_{K,\text{ét}}\,;\Lambda)$ le topos des faisceaux en Λ-modules sur $X_{K,\text{ét}}$.

Définition 2.1. — Soit Λ un anneau.

- Soit $\operatorname{Loc}(X_{K,\text{ét}}\,;\Lambda) \subset \operatorname{Shv}(X_{K,\text{ét}}\,;\Lambda)$ la sous-catégorie des faisceaux en Λ-modules qui sont localement constants pour la topologie étale et de rang fini. C'est une catégorie Λ-linéaire munie de Hom et d'un produit tensoriel interne satisfaisant les axiomes usuels. De plus, on munit cette catégorie d'une structure de site à partir de la topologie étale.
- Soit $\operatorname{Loc}_p^+(X_{K,\text{ét}}) \coloneqq \varprojlim_n \operatorname{Loc}(X_{K,\text{ét}}\,;\mathbb{Z}/p^n)$, où les morphismes de transition sont donnés par la multiplication par p, la catégorie des *systèmes locaux étales en $\mathbb{Z}_p$-réseaux.* De même, cette catégorie est un site pour la topologie étale et est une catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire munie d'un Hom et d'un produit tensoriel interne.
- Soit $\operatorname{Loc}_p^{(+)}(X_{K,\text{ét}}) \coloneqq \operatorname{Loc}_p^+(X_{K,\text{ét}})\left[\frac{1}{p}\right]$ le localisé de $\operatorname{Loc}_p^+(X_{K,\text{ét}})$ en $p^{\mathbb{Z}}$, i.e. en les isogénies. C'est la catégorie des systèmes locaux étales en $\mathbb{Z}_p$-réseaux à isogénie près. Soit $\operatorname{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ le champ étale associé dont les objets seront appelés *$\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux étales.* Alors $\operatorname{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ est une catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire munie d'un Hom interne et d'un produit tensoriel interne.

Remarque 2.2. — 1. On rappelle que le foncteur $M \to \underline{M}$ qui a un Λ-module M associe le faisceau constant de fibre M est l'adjoint à gauche du foncteur des sections globales et que l'image essentielle de ce foncteur est constituée des faisceaux constants. Un faisceau localement constant est alors un faisceau tel qu'il existe un recouvrement sur lequel il devient constant.

2. D'après de Jong [**21**, 4], on peut décrire les systèmes locaux étales en $\mathbb{Z}_p$-réseaux d'une manière différente : ce sont des faisceaux $\mathcal{F}$ qui sont p-divisibles, de torsion p-primaire et tels que $\mathcal{F}[p]$ est un faisceau en $\mathbb{F}_p$-vectoriels à fibres finis (c'est-à-dire un objet compact dans la catégorie des $\mathbb{F}_p$-modules). Plus précisément ceci signifie que $\mathcal{F} \coloneqq \bigcup_n \mathcal{F}[p^n]$ où $\mathcal{F}[p^n]$ est un $\mathbb{Z}/p^n$-faisceau étale localement libre et de type fini. On remarque que cette définition est équivalente à la notre puisque le germe de $\mathcal{F}$ en un point géométrique $\bar{x}$ est défini par
$$\mathcal{F}_{\bar{x}} \coloneqq \varprojlim_n \mathcal{F}[p^n]_{\bar{x}}$$
où les applications de transition sont la multiplication par p.

3. On décrit explicitement ce qu'est un $\mathbb{Q}_p$-système local étale $\mathbb{L}$. C'est la donnée d'un recouvrement étale $U \to X_K$ et
   - d'un système local étale en $\mathbb{Z}_p$-réseaux à isogénie près, $\mathbb{L}_U \in \operatorname{Loc}_p^{(+)}(U_{\text{ét}})$,
   - d'un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-réseaux à isogénie près sur $U \times_X U \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} U$,
   $$\Phi\colon \mathrm{pr}_1^*\mathbb{L}_U \cong \mathrm{pr}_2^*\mathbb{L}_U.$$

   On note que $\operatorname{Loc}^{(+)}$ n'est effectivement pas un champ puisque un système local n'admet pas nécessairement un réseau invariant[(4)]. De cette description, on peut décrire le champs $\operatorname{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ comme la fibre du diagramme
$$\operatorname{Loc}_p(X_{K,\text{ét}}) = \left[\operatorname{Loc}_p^{(+)}\big((X_K \times_K X_K)_{\text{ét}}\big) \xrightarrow{pr_1^*-pr_2^*} \operatorname{Loc}_p^{(+)}\big(X_{K,\text{ét}}\big)\right].$$

[(4)] Par exemple (cf. [**37**, Example 1.4.5]) : soit X le recollement de deux copies de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ le long de $\{0,\infty\}$. On considère le système local trivial de rang 1 sur $X\setminus\{0\}$ et $X\setminus\{\infty\}$ que l'on recolle par le morphisme identité sur une copie de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}\setminus\{0,\infty\}$ et par la multiplication par p sur l'autre copie. Alors, le système local de rang 1 obtenu n'a pas de réseau invariant. Si X est un schéma, il suffit de demander qu'il soit normal.

Soit $\bar{x}\colon \mathrm{Spa}(C, C^+) \to X_K$ un point géométrique. On note $\pi_1^{\text{ét}}(X_K\,,\,\bar{x})$ le groupe fondamental étale introduit par de Jong [**21**]. Rappelons que, d'après de Jong, le foncteur fibre définit un foncteur à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-représentations de dimension finie du groupe fondamental, soit

$$\omega_{\bar{x}}\colon \mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}\pi_1^{\text{ét}}(X_K\,,\,\bar{x})$$

qui est une équivalence de catégories si X_K est géométriquement connexe. Pour $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local étale, on note $\mathbb{V}(\bar{x}) \coloneqq \omega_{\bar{x}}\mathbb{V}$ sa fibre en $\bar{x}$. Le groupe fondamental étale de de Jong est prodiscret mais pas profini à l'instar du groupe fondamental algébrique, défini à partir des revêtements étales finis et que l'on note $\pi_1^{\text{alg}}(X_K\,,\,\bar{x})$. On déduit de la construction de de Jong que la catégorie $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ est naturellement une catégorie Tannakienne. De plus, ce foncteur se restreint en une équivalence de catégories

$$\omega_{\bar{x}}\colon \mathrm{Loc}_p^+(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}\pi_1^{\text{alg}}(X_K\,,\,\bar{x}).$$

Exemple 2.3. — L'exemple usuel est l'espace de Lubin-Tate $\mathrm{M}_{\mathrm{LT}}^0$ de dimension $h-1$ qui est l'espace des quasi-isogénies associées à un groupe de Lubin-Tate de hauteur $h \geqslant 1$ pour h un entier. Cet espace admet un morphisme des périodes étale surjectif $\pi_{\mathrm{LT}}\colon \mathrm{M}_{\mathrm{LT},C}^0 \to \mathbb{P}_C^{h-1}$ qui exhibe ses composantes connexes, isomorphes à des boules ouvertes de dimension $h-1$, comme revêtements étales analytiques de l'espace projectif.

De Jong montre qu'il existe un morphisme surjectif $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^{h-1}\,,\,\bar{x}) \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_h(\mathbb{Q}_p)$ alors que $\pi_1^{\text{alg}}(\mathbb{P}^{h-1}\,,\,\bar{x}) = 0$. Notons que ce n'est pas une contradiction puisque $\mathrm{SL}_h(\mathbb{Q}_p)$ est localement profini mais pas n'est pas profini et n'admet pas de quotient fini. Il existe donc sur $\mathbb{P}_C^{h-1}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local étale, associé à la représentation standard de $\mathrm{SL}_h(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p^h$. Mais, par ce qui précède, ce système local ne provient pas d'un $\mathbb{Z}_p$-système local étale en réseaux. De même, on remarque que $\mathbb{Q}_p^h$ n'a pas de réseau stable sous l'action de $\mathrm{SL}_h(\mathbb{Q}_p)$. On note ce système local $\mathbb{V}_{\mathrm{LT}}$; c'est un exemple de système local isotrivial cristallin comme nous le verrons dans la suite.

Notons de plus que ce système local provient du groupe de Lubin-Tate universel sur $\mathrm{M}_{\mathrm{LT}}^0$. Il admet donc un $\mathbb{Z}_p$-système local étale en réseaux que l'on note $\mathbb{V}_{\mathrm{LT}}^+$ et qui ne descend pas le long du morphisme étale π_{LT}. La représentation $\big(\mathbb{V}_{\mathrm{LT}}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\big)(\bar{x})$ associée à ce réseau par $\omega_{\bar{x}}$ est la représentation standard restreinte à $\mathrm{SL}_h(\mathbb{Z}_p)$ et la tour de revêtements finis associée est la tour de Lubin-Tate $\mathrm{M}_{\mathrm{LT}}^\infty \coloneqq \varprojlim_n \mathrm{M}_{\mathrm{LT}}^n \to \mathrm{M}_{\mathrm{LT}}^0$ dont le groupe d'automorphisme est bien $\mathrm{SL}_h(\mathbb{Z}_p)$.

2.1.2. *Systèmes locaux proétales.* — On munit ici X_K de la topologie proétale, le topos correspondant sera noté $\mathrm{Shv}(X_{K,\text{pét}})$. Pour Λ un anneau, on note $\mathrm{Shv}(X_{K,\text{pét}}\,;\,\Lambda)$ les faisceaux proétales en Λ-modules. De même que dans le cas étale, on définit $\mathrm{Loc}\big(X_{K,\text{pét}}\,;\,\Lambda\big) \subset \mathrm{Shv}(X_{K,\text{pét}}\,;\,\Lambda)$ le champ sur $X_{K,\text{pét}}$ des faisceaux localement constants en Λ-modules de rangs finis pour la topologie proétale. Ensuite, on pose $\mathrm{Loc}^+(X_{K,\text{pét}}) \coloneqq \varprojlim_n \mathrm{Loc}(X_{K,\text{pét}}\,;\,\mathbb{Z}/p^n)$ la catégorie des *$\widehat{\mathbb{Z}}_p$-systèmes locaux proétales*. Le $\mathbb{Z}_p$-système local proétale constant $\widehat{\mathbb{Z}}_p \coloneqq \varprojlim \mathbb{Z}/p^n$ permet, contrairement au cas étale, de définir $\mathrm{Loc}\Big(X_{K,\text{pét}}\,;\,\widehat{\mathbb{Z}}_p\Big)$ la catégorie des $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-modules localement constants de rang fini ; on définit

$$\mathrm{Loc}_p^+(X_{K,\text{pét}}) \coloneqq \mathrm{Loc}\Big(X_{K,\text{pét}}\,;\,\widehat{\mathbb{Z}}_p\Big)\,.$$

On définit $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}}) \coloneqq \mathrm{Loc}_p^+(X_{K,\text{pét}})\big[\frac{1}{p}\big]$ qui est un champ (cf. remarque 2.5), contrairement au cas étale. On a aussi $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}}) \cong \mathrm{Loc}\Big(X_{K,\text{pét}}\,;\,\widehat{\mathbb{Q}}_p\Big)$ où $\widehat{\mathbb{Q}}_p \coloneqq \widehat{\mathbb{Z}}_p\big[\frac{1}{p}\big]$. De plus, posons $\widehat{\mathbb{Z}}_p(1) \coloneqq \varprojlim_n \mu_{p^n}$ qui est un élément de $\mathrm{Loc}_p^+(X_{K,\text{pét}})$ dont le $\mathbb{Q}_p$-système local proétale associé est $\widehat{\mathbb{Q}}_p(1)$. On note $\widehat{\mathbb{Q}}_p(-1) \coloneqq \widehat{\mathbb{Q}}_p(1)^\vee$ le dual et pour $k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Q}}_p(k) \coloneqq \widehat{\mathbb{Q}}_p(1)^{\otimes k}$ si $k \geqslant 0$ et $\widehat{\mathbb{Q}}_p(k) \coloneqq \widehat{\mathbb{Q}}_p(-1)^{\otimes -k}$ si $k \leqslant 0$. De plus, si $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{Q}_p$-faisceau proétale on note pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}(k) \coloneqq \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\mathbb{Q}}_p(k)$.

On note $\nu\colon X_{K,\text{pét}} \to X_{K,\text{ét}}$ le morphisme de sites naturel. Ce morphisme induit un morphisme de topos $\mathrm{Shv}(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Shv}(X_{K,\text{pét}})$ que l'on note $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$. Par exemple le $\mathbb{Q}_p$-système local proétale associé à un $\mathbb{Q}_p$-système local étale définit un foncteur $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}})$, donné par $\mathbb{V} \mapsto \widehat{\mathbb{V}} := \nu^*\mathbb{V}$.

Pour finir, rappelons un lemme de Kedlaya et Liu (cf. [**37**, Lemma 9.1.11]) qui nous assure que sur un espace rigide, les catégories des systèmes locaux étales et proétales coïncident ; notons que cette équivalence de catégories n'est pas exacte.

Lemme 2.4. — *Le foncteur naturel* $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}})$ *est une équivalence de catégorie.*

Remarque 2.5. — Le lemme précédent justifie que $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}})$ est naturellement un champ ce qui fait du foncteur $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{pét}})$ un isomorphisme de champ.

2.2. Fibrés

Dans cette sous-section on garde les notations précédentes. En particulier X_K désigne un espace surconvergent, un espace rigide ou un schéma sur K et on le supposera lisse sur K.

2.2.1. *Fibrés vectoriels plats filtrés.* — On note $\mathrm{Vect}(X_K)$ le champ des *fibrés vectoriels* sur X_K, i.e. des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres et de rang fini sur X_K. Ce champ ne dépend pas de la topologie (cf. [**44**, Lemma 7.3]) au sens où on a des équivalences naturelles

$$\mathrm{Vect}(X_{K,\text{an}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}(X_{K,\text{ét}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Vect}(X_{K,\text{pét}}).$$

La seconde équivalence sera notée $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{E}} := \nu^*\mathcal{E}$: on prendra garde, ce n'est pas un foncteur exact.

On note $\mathrm{Vect}_\nabla(X_K)$ le champ des *fibrés plats* sur X_K, qui sont les fibrés vectoriels munis d'une connexion plate, i.e. une application K-linéaire $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X_K}$ satisfaisant la règle de Leibniz et telle que $\nabla^{(2)} \circ \nabla = 0$ où $\nabla^{(2)}\colon \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X_K} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^2_{X_K}$ est l'extension de la connexion. De plus, on note $\mathrm{Vect}^\bullet(X_K)$ la catégorie des fibrés vectoriels munis d'une filtration finie, décroissante, exhaustive et séparée, i.e. une suite de sous-$\mathcal{O}_{X_K}$-modules $\{\mathrm{Fil}^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ d'un fibré $\mathcal{E}$ telle qu'il existe deux entiers $a \leqslant b$ tels que $\mathcal{E} = \mathrm{Fil}^a \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Fil}^b = 0$ et telle que pour tout $i \in [\![a, b]\!]$, Fil^i admet Zariski localement un supplémentaire Fil_i tel que $\mathcal{E} = \mathrm{Fil}^i \oplus \mathrm{Fil}_i$. Insistons qu'a priori ceci est moins fort que de demander qu'il existe un supplémentaire qui soit un fibré vectoriel. Finalement, on définit $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$ le champ des fibrés plats muni d'une filtration et satisfaisant la *transversalité de Griffiths*, i.e. pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\nabla \mathrm{Fil}^i \subseteq \mathrm{Fil}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X.$$

Un élément de $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$ est noté $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ et appelé un *fibré plat filtré* ; on sous-entend donc implicitement que la transversalité de Griffiths est satisfaite. On a un diagramme commutatif tautologique de foncteurs d'oubli

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}^\bullet(X_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Vect}_\nabla(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(X_K) \end{array}$$

2.2.2. $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$*-systèmes locaux.* — On renvoit à [**44**, Definition 6.1] pour la définition de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ et à [**44**, Definition 6.8] pour la définition de $\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ (on rappelle que le produit tensoriel dans la définition doit être complété). On note $\mathrm{Loc}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\text{pét}})$ la catégorie des $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$-systèmes locaux (proétales). D'après [**44**, Theorem 7.2], on sait qu'on a une équivalence de catégories entre $\mathrm{Loc}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\text{pét}})$ et $\mathrm{Vect}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\text{pét}})$, la catégorie des $\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$-modules munis d'une connexion plate. L'équivalence est donnée dans le sens direct par $\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}} \mapsto \mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}} \mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ et dans le sens inverse par $(\mathcal{M}, \nabla) \mapsto \mathcal{M}^{\nabla=0}$, appellé le foncteur des *sections horizontales* ; cette équivalence rappelle la correspondance de Riemann-Hilbert classique. On rappelle qu'un élément $(\mathcal{M}, \nabla)$ de $\mathrm{Vect}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\text{pét}})$ est dit *associé* à un élément

$(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ de $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$ s'il existe un isomorphisme de faisceaux proétales

$$\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\cong\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K},\tag{2.1}$$

compatible aux filtrations et connexions. Les filtrations sont les filtrations produits où $\mathcal{M}$ est muni de la filtration triviale, $\mathcal{E}$ est muni de la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet$ et $\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ de la filtration définie dans [**44**, Definition 6.8]. Dans ce cas, les sections horizontales de $\mathcal{M}$ sont données en termes de $\mathcal{E}$ par

$$\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\coloneqq\mathrm{Fil}^0\big(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\big)^{\nabla=0}.$$

Cette formule définit un morphisme de champs $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)\to\mathrm{Loc}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\mathrm{pét}})$, qui est pleinement fidèle ; en effet, on a en tant que faisceaux étales $\mathcal{E}_{\text{ét}}=\nu_*\big(\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\big)$ qui est muni d'une connexion et d'une filtration induites par $\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}$ et fournit la construction réciproque pour les fibrés associés. C'est essentiellement le théorème [**44**, Theorem 7.6].

De plus, on a un autre morphisme, utilisé dans la preuve du théorème [**44**, Theorem 7.6], mais qui ne dépend pas de la filtration : $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}\colon\mathrm{Vect}_\nabla(X_K)\to\mathrm{Loc}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\mathrm{pét}})$ qui est donnée par $(\mathcal{E},\nabla)\mapsto\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)\coloneqq(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K})^{\nabla=0}$. On a un isomorphisme

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\cong\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)\otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}$$

compatible avec la connexion mais, si $\mathcal{E}$ est filtré, pas nécessairement à la filtration. On munit $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)$ de la filtration induite par cet isomorphisme pour $\mathcal{E}$ muni de la filtration triviale. De plus, notons $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)\coloneqq\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)\otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}$ muni de la filtration induite. Ainsi, pour $k\in\mathbb{Z}$ on a $\mathrm{Fil}^{\mathrm{k}}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)=t^k\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)$. On a le lemme suivant (cf. [**44**, Lemma 7.8]) :

Lemme 2.6. — *Pour tout entier $r\in\mathbb{Z}$ on a une suite exacte*

$$0\longrightarrow\widehat{\mathcal{E}}(r+1)\longrightarrow\mathrm{Fil}^{\mathrm{r}}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)/\mathrm{Fil}^{\mathrm{r+2}}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)\longrightarrow\widehat{\mathcal{E}}(r)\longrightarrow 0$$

et dans la suite exacte longue obtenue en appliquant $\mathrm{R}\nu_*$ à cette suite exacte, le morphisme connectif en degré $k\leqslant r$ est $(-1)^k\nabla^{(k)}\colon\Omega^k_{\mathcal{E}}(r-k)\to\Omega^{k+1}_{\mathcal{E}}(r-k)$.

Le lemme suivant exprime le lien entre $\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ et $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla)$. Remarquons que si on note $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\cong\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}$ alors on a un isomorphisme de faisceaux $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\cong\mathbb{D}(\mathcal{E},\nabla)$ mais qui n'est pas compatible aux filtrations. Le lemme suivant (cf. [**44**, Proposition 7.9]) exprime le lien entre les deux filtrations.

Lemme 2.7. — *Le $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$-système local $\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ est l'unique sous-objet de $\mathbb{D}(\mathcal{E},\nabla)$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$*

$$\frac{\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\cap\mathrm{Fil}^{\mathrm{k}}\mathbb{D}(\mathcal{E},\nabla)}{\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)\cap\mathrm{Fil}^{k+1}\mathbb{D}(\mathcal{E},\nabla)}=(\mathrm{Fil}^{-k}\widehat{\mathcal{E}})(k)\subset\widehat{\mathcal{E}}(k).$$

On associe à un $\mathbb{Q}_p$-système local étale un $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$-système local par $\mathbb{V}\mapsto\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}$ où $\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\coloneqq\widehat{\mathbb{V}}\otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ ce qui définit un morphisme $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})\mapsto\mathrm{Loc}^+_{\mathrm{dR}}(X_{K,\mathrm{pét}})$. De même, on note $\mathbb{V}\mapsto\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}$ le foncteur correspondant après avoir inversé t. On peut alors associer à $\mathbb{V}$ un fibré plat filtré, ce qui fournit un foncteur $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})\to\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$.

Définition 2.8. — Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local étale. On dit que $\mathbb{V}$ est *de Rham* si $\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\coloneqq\widehat{\mathbb{V}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$ est associé à un élément $(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ de $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$, au sens de (2.1), tel que $\mathrm{rang}_{\mathcal{O}_{X_K}}\mathcal{E}=\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{V}$. Dans ce cas, les *poids de Hodge-Tate* de $\mathbb{V}$ sont les opposés des sauts de la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet$ sur $\mathcal{E}$. Plus précisément, i est un poids de Hodge-Tate si et seulement si

$$\mathrm{Fil}^{-i}\mathcal{E}\neq\mathrm{Fil}^{-i+1}\mathcal{E}.$$

Remarque 2.9. — On pourrait définir les poids de Hodge-Tate de manière différente en utilisant les opérateurs de Sen (cf. [**47**]) ; le lemme précédent nous dirait alors que ces définitions sont équivalentes.

2.3. Opers

En général, les opers sont certains types de fibrés plats filtrés sur les courbes munis de l'action d'une algèbre de Lie satisfaisant une certaine condition de transversalité. Ils apparaissent naturellement dans la correspondance de Langlands quantique. On renvoit à [**2**] pour la définition générale et plusieurs propriétés que l'on rappellera. Techniquement, on s'intéresse ici aux opers pour GL_n mais on va s'autoriser à décaler la filtration pour faire apparaître les poids de Hodge-Tate.

Définition 2.10. — Soit X_K une courbe lisse surconvergente sur K. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ un fibré plat filtré satisfaisant la transversalité de Griffiths. On dit que $\mathcal{E}$ est un *oper* de poids (a, b), avec $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $b > a$ s'il est de rang $b - a + 1$ et si

- $\mathcal{E} = \mathrm{Fil}^{-b} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Fil}^{-a} \supsetneq 0$,
- pour tout entier i tel que $a \leqslant i \leqslant b$ le quotient $\mathrm{Gr}_i\mathcal{E} \coloneqq \mathrm{Fil}^{-i}/\mathrm{Fil}^{-i+1}$ est un fibré en droites,
- l'application naturelle(5) induite par ∇,

$$\theta_i \colon \mathrm{Gr}_i\mathcal{E} \to \mathrm{Gr}_{i+1}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \Omega^1_{X_K},$$

  est un isomorphisme pour tout entier i tel que $a \leqslant i \leqslant b - 1$.

Ainsi, si $\mathbb{V}$ est un $\mathbb{Q}_p$-système local de de Rham proétale, on dit que $\mathbb{V}$ est un *$\mathbb{Q}_p$-oper proétale* si le fibré plat filtré associé est un oper. Notons que si cet oper est de poids (a, b) alors les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}$ sont précisément $a, a + 1, \dots, b$.

Faisons quelques rappels de [**2**, §2]. On note simplement $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X_K}$ et $\Omega = \Omega^1_{X_K}$. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{X_K} \coloneqq \bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^{\otimes -n}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X_K et $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ le sous-faisceau des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ pour $k \geqslant 0$ un entier. Notons que $\mathcal{D}$ est naturellement muni d'une structure de faisceau en anneaux filtré par les $\mathcal{D}_k$ mais qu'il n'est pas gradué en tant que faisceau d'anneau. La connexion ∇ définit une structure de $\mathcal{D}$-module sur $\mathcal{E}$ et on obtient une application $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui induit un isomorphisme $\mathcal{D}_{b-a} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ d'après la seconde condition dans la définition. Ceci donne un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{b-a} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathcal{D}_{b-a+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{\otimes(a-b-1)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{E} & & \end{tikzcd}$$

qui définit un scindage $\Omega^{\otimes(a-b-1)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \to \mathcal{D}_{b-a+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E}$ et donc une section ${}^tL_\nabla \in \mathrm{H}^0\big(X_K\,;\, \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\otimes(-1)}\big)$, où $\mathcal{A} \coloneqq \big(\mathrm{Gr}_a\mathcal{E}\big)^{\otimes(-1)}$ et $\mathcal{B} \coloneqq \Omega \otimes_{\mathcal{O}} \big(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}\big)^{\otimes(-1)}$ comme la seconde condition dans la définition fournit un isomorphisme $\Omega^{\otimes(a-b)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \cong \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}$. On considère cette section comme un opérateur différentiel ${}^tL_\nabla \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui est d'ordre $b - a + 1$ et $\sigma_\nabla^{b-a+1} = 1$ d'après [**2**, §2.1], où σ_∇^{b-a+1} est le *symbole principal d'ordre* $b - a + 1$ défini naturellement comme la section

$$\sigma_\nabla^{b-a+1} \in \mathrm{H}^0\big(X_K\,;\, \mathcal{A}^{\otimes(-1)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{\otimes(a-b-1)}\big).$$

Réciproquement, à partir d'un opérateur différentiel d'ordre $b - a + 1$, entre des faisceaux inversibles, de symbole principal inversible, on peut construire un oper de poids (a, b). On considère maintenant la transposée de cet opérateur différentiel (au sens de [**2**, §2.2]) ce qui définit un opérateur différentiel $\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}^{\otimes(-1)} \to \Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{\otimes(-1)}$ qui induit un opérateur différentiel d'ordre $b - a + 1$

$$L_\nabla \colon \mathrm{Gr}_b\mathcal{E} \to \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}},$$

où $\mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}} \coloneqq \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$. Le lemme suivant est immédiat à partir des définitions et du fait que les suites exactes de fibrés vectoriels soient scindés sur les espaces Stein et affinoïdes :

(5) Cette application est appelée le *champ de Higgs*.

Lemme 2.11. — *Supposons que X_K soit un espace Stein ou un affinoïde surconvergent, lisse et de dimension* 1 *sur K. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ un oper de poids (a, b) sur X_K. Alors, les suites exactes naturelles*

$$0 \to \mathrm{Fil}^{-b+1} \to \mathcal{E} \to \mathrm{Gr}_b\mathcal{E} \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathrm{Fil}^{-a} \to 0$$

sont scindés. De plus, la filtration de $\mathcal{E}$ induit une filtration sur ces composantes et on obtient, pour $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Fil}^i\mathrm{Gr}_b\mathcal{E} = \begin{cases} \mathrm{Gr}_b\mathcal{E} & si\ i \leqslant -b, \\ 0 & si\ i \geqslant -b+1, \end{cases} \quad \mathrm{Fil}^i\mathrm{Gr}_a\mathcal{E} = \begin{cases} \mathrm{Gr}_a\mathcal{E} & si\ i \leqslant -a, \\ 0 & si\ i \geqslant -a+1. \end{cases}$$

3. Systèmes locaux isotriviaux

3.1. Définitions et premières propriétés

3.1.1. *Définition.* — Rappelons qu'un *φ-module sur K_0* est un K_0-espace vectoriel muni d'une application σ-linéaire et bijective. Un *isocristal* sur k est alors un φ-module sur K_0 de dimension finie. Les isocristaux sur un corps parfait k forment une catégorie Tannakienne que l'on note Iso_k. On renvoit à [**49**] pour la définition du faisceau de période $\mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K}$ (cf. [**49**, Definition 2.1, Definition 2.4]) que l'on utilisera librement.

Définition 3.1. — Un $\mathbb{Q}_p$-système local étale $\mathbb{V}$ est *isotrivial cristallin* s'il existe un isocristal D sur k et un isomorphisme de faisceaux proétales

$$\psi\colon \widehat{\mathbb{V}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K} \cong \underline{D} \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K},$$

compatible avec l'endomorphisme de Frobenius, où on rappelle que $\underline{D}$ est le faisceau constant associé à D (cf. le premier point de la remarque 2.2). On appellera le couple (D, ψ) une *isotrivialisation* de $\mathbb{V}$.

Remarque 3.2. — 1. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial cristallin, on note que l'on a $\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V} = \mathrm{rang}_{K_0} D$, donc $\mathbb{V}$ est cristallin (au sens de Faltings cf. [**49**, 1.0.2].)

2. On peut prendre une définition légèrement plus générale, mieux adaptée au cas propre, en remplaçant $\underline{D}$ par un faisceau de φ-modules localement constant pour la topologie de Zariski. Tout ce que l'on fera devrait facilement s'adapter à ce cas.

3.1.2. *Foncteur fibre cristalline.* — On note $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}}) \subset \mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ la sous-catégorie pleinement fidèle des $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux étales qui sont isotriviaux cristallins. On a le lemme suivant qui résume les propriétés de cette sous-catégorie :

Lemme 3.3. — *1. La sous-catégorie* $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}})$ *de* $\mathrm{Loc}_p(X_{K,\text{ét}})$ *est une sous-catégorie Tannakienne.*

2. Le foncteur $\mathbb{D}\colon \mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Iso}_k$, qui associe à $\mathbb{V}$ d'isotrivialisation (D, ψ) l'isocristal D, est un foncteur tensoriel bien défini comme foncteur fibre.

Démonstration. — La structure de catégorie Tannakienne sur $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}})$ est donnée par le foncteur fibre $\mathbb{D}$. Premièrement, notons que si $\mathbb{V}$ est un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial cristallin, alors l'isocristal associé est unique à isomorphisme près. Soit $\bar{x}\colon \mathrm{Spa}(C, C^+) \to X_K$ un point géométrique fermé de X_K tel que $C = \widehat{\bar{K}}$. Alors, si (D, ψ) est une isotrivialisation de $\mathbb{V}$ alors ψ induit un isomorphisme, compatible avec l'action du Frobenius et du groupe de Galois

$$\mathbb{V}(\bar{x}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}} \cong \underline{D} \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}.$$

On considère ensuite les invariants sous l'action de $\mathrm{Gal}(C/K_0)$, qui agit continument, pour obtenir $\big(\mathbb{V}(\bar{x}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}\big)^{\mathrm{Gal}(C/K_0)} \cong D$. Ainsi, on voit que D ne dépend pas de $\bar{x}$ et que la construction est fonctorielle, ce qui définit un foncteur $\mathbb{D}\colon \mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Iso}_k$. Vérifions que c'est un foncteur tensoriel. Soient $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ des systèmes locaux isotriviaux cristallins et soient (D_1, ψ_1) et (D_2, ψ_2) des isotrivialisations respectives. Alors,

$$\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V}_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K} \cong \mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{D_2} \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K} \cong \underline{D_1 \otimes_{K_0} D_2} \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K},$$

où le premier isomorphisme est donné par ψ_2 et le second par ψ_1. Ainsi, on a des isomorphismes naturels $\mathbb{D}(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V}_2) \cong D_1 \otimes_{K_0} D_2 \cong \mathbb{D}(\mathbb{V}_1) \otimes_{K_0} \mathbb{D}(\mathbb{V}_2)$. Il reste à montrer que $\mathbb{D}$ est un foncteur exact. On considère une suite exacte de systèmes locaux isotriviaux

$$0 \to \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_3 \to 0.$$

On applique le foncteur fibre $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}(\bar{x})$ et on en déduit une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-représentations de $\mathrm{Gal}(C/K_0)$,

$$0 \to \mathbb{V}_1(\bar{x}) \to \mathbb{V}_2(\bar{x}) \to \mathbb{V}_3(\bar{x}) \to 0.$$

Or, ces représentations sont cristallines et on sait que le foncteur de Fontaine $V \mapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}})^{\mathrm{Gal}(C/K_0)}$ est un foncteur fibre sur les représentations cristallines, donc en particulier est exact. On obtient donc une suite exacte

$$0 \to \mathbb{D}(\mathbb{V}_1) \to \mathbb{D}(\mathbb{V}_2) \to \mathbb{D}(\mathbb{V}_3) \to 0.$$

Ainsi, $\mathbb{D}$ définit bien un foncteur fibre et $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}})$ est bien une catégorie Tannakienne. Plus directement, le foncteur $\mathbb{D}$ est la composée de deux foncteurs fibres, donc est un foncteur fibre. $\square$

3.1.3. *Foncteur fibre de Rham.* — Pour $\mathbb{V}$ dans $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}})$ on appellera simplement $\mathbb{D}(\mathbb{V})$ l'isocristal associé à $\mathbb{V}$. Soit D un isocristal sur k. On définit les faisceaux proétales

$$\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) := \left(\underline{D} \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K}\right)^{\Phi=\mathrm{id}}, \quad \mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D) := \left(\underline{D} \otimes_{K_0} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cr},X_K}\right)^{\Phi=\mathrm{id}},$$

où le Frobenius Φ est le produit tensoriel du Frobenius sur D et de celui sur $\mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K}$. On rappelle que la torsion à la Tate pour les isocristaux est donnée par $K_0(1)$ qui est l'isocristal de dimension 1, muni du Frobenius $\varphi = \frac{1}{p}\sigma$.

Soit $\mathbb{V}$ un objet de $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}})$ et soit $D = \mathbb{D}(\mathbb{V})$ son isocristal associé. On a alors une inclusion $\mathbb{V} \to \mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)$. On veut décrire le quotient qui fait intervenir la partie de Rham. On commence par un lemme qui explicite le foncteur fibre $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$.

Lemme 3.4. — *Le système local* $\mathbb{V}$ *est de Rham et le fibré associé* $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ *est muni d'une trivialisation* $\mathcal{E} \cong D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$*, où* $D_K := D \otimes_{K_0} K$*, qui ne dépend que de l'isotrivialisation* (D, ψ) *de* $\mathbb{V}$*. En particulier, le foncteur fibre* $\mathrm{Litc}_p(X_{K,\text{ét}}) \to \mathrm{Vect}(X_K)$ *se factorise par* Vect_K*.*

Rappelons qu'on a défini pour la partie de Rham, à partir d'un élément $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ de $\mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$, des faisceaux proétales filtrés

$$\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) := \left(\widehat{\mathcal{E}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X_K}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\right)^{\nabla=0}, \quad \mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) := \mathrm{Fil}^0\left(\widehat{\mathcal{E}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X_K}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X_K}\right)^{\nabla=0}.$$

Rappelons de plus que, en tant que $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X_K}$-systèmes locaux, $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) = \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla)$ mais la filtration est différente. On note de plus le faisceau quotient

$$\mathbb{X}^-_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) := \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)/\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet).$$

On a alors un morphisme naturel $\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ qui est injectif.

3.1.4. *Fibrés fortement isotriviaux.* — On donne maintenant une condition plus forte que l'isotrivialité sur un fibré portant sur la connexion. On dit qu'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_K est *isotrivial* s'il existe un K-espace vectoriel D_K de dimension finie tel que $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{X_K} \otimes_K D_K$.

Définition 3.5. — Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel isotrivial sur X_K d'espace vectoriel associé D_K. Supposons $\mathcal{E}$ muni d'une connexion $\nabla\colon D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K} \to D_K \otimes_K \Omega_{X_K}$. On note

$$D_K^\nabla = \mathrm{Ker}\left[\nabla\colon D_K \otimes \mathcal{O}(X_K) \to D_K \otimes_K \Omega_{X_K}(X_K)\right],$$

le K-espace vectoriel des *sections globales horizontales*. Alors on dit que $(\mathcal{E}, \nabla)$ est *fortement isotrivial* si l'inclusion naturelle $D_K^\nabla \hookrightarrow D_K \otimes \mathcal{O}_{X_K}$ induit un isomorphisme $D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K} \cong D_K^\nabla \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$. De même, on dit d'un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial cristallin $\mathbb{V}$ qu'il est *fortement isotrivial cristallin* si le fibré associé muni de sa connexion $(\mathcal{E}, \nabla)$ est fortement isotrivial.

Remarque 3.6. — Si la connexion ∇ est unipotente, il suffit que $\dim_K D_K = \dim_K D_K^\nabla$ pour que le fibré muni de sa connexion soit fortement isotrivial. En effet, dans ce cas la matrice de passage entre $D_K^\nabla \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ et $D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ d'une base compatible avec D_K^∇ vers une base compatible avec D_K est unipotente donc de déterminant 1. L'inclusion naturelle $D_K^\nabla \otimes_K \mathcal{O}_{X_K} \to D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ est alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X_K}$-modules.

La condition pour un fibré plat d'être fortement isotrivial est très restrictive : cette condition implique que la connexion se trivialise :

Lemme 3.7. — *Soit* $(\mathcal{E}, \nabla)$ *un fibré plat isotrivial de* K*-espace vectoriel associé* D_K*. Alors* $(\mathcal{E}, \nabla)$ *est fortement isotrivial si et seulement si* $\nabla = \mathrm{id} \otimes d\colon D_K^\nabla \otimes_K \mathcal{O}_{X_K} \to D_K^\nabla \otimes_K \Omega_{X_K}$*.*

Démonstration. — La réciproque est immédiate, montrons le sens direct. On a des isomorphismes $\mathcal{E} \cong D_K^{\nabla} \otimes_K \mathcal{O}_{X_K} \cong D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$. Or, soit $f_1, \dots, f_d$ une base de D_K^{∇}. Par définition, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant d$ on a $\nabla f_i = 0$. Soit $s \in \mathcal{E}(U_K)$ une section locale, on peut la décomposer dans la base des f_i

$$s = \sum_{i=0}^{d} f_i \otimes s_i, \;\; s_1, \dots, s_d \in \mathcal{O}_{X_K}(U_K).$$

Donc on obtient

$$\nabla(s) = \sum_{i=0}^{d} f_i \otimes ds_i = (\mathrm{id} \otimes d)(s).$$

□

Pour un fibré vectoriel muni d'une connexion fortement isotrivial on note parfois $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) = (D_K, d \otimes \mathrm{id}, \mathrm{Fil}^\bullet)$, ce qui sous-entend que $D_K = D_K^{\nabla}$. Ainsi, on dira qu'un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial est *fortement isotrivial* si le fibré plat associé est fortement isotrivial.

3.1.5. *Suite exacte fondamentale.* — La proposition suivante est une reformulation d'un théorème de Kedlaya-Liu (cf. [**37**, Corollary 8.7.10]) :

Proposition 3.8. — *Soit D un isocristal sur k et soit* $\mathrm{Fil}^\bullet$ *une filtration décroissante finie et exhaustive du fibré vectoriel $\mathcal{E} = D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ que l'on munit de la connexion triviale* $\mathrm{id} \otimes d$ *pour définir un fibré plat filtré $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons qu'en tout point géométrique de X_K la filtration soit faiblement admissible. Alors le noyau de l'application naturelle*

$$\mathbb{V} := \mathrm{Ker}\left[\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{-}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)\right]$$

définit un $\mathbb{Q}_p$-système local proétale fortement isotrivial de φ-module associé D. De plus, l'application $\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{-}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ est surjective.

Démonstration. — Comme la question est locale sur le site proétale, on se restreint à $S \to X_K$ un espace adique perfectoïde sur X_K et on va montrer que $\mathbb{V}_S$ définit un système local isotrivial. Comme le site proétale de S et de son basculé $S^\flat$ sont équivalents on peut supposer que S est perfectoïde de caractéristique p.

On va maintenant considérer la courbe de Fargues-Fontaine relative sur S, $\mathcal{X}_{\mathrm{FF},S}$. Alors, un théorème[(6)] de Kedlaya et Liu (cf. [**37**, Corollary 8.7.10]) nous assure que les fibrés vectoriels semi-stables, ponctuellement de pente 0 sur $\mathcal{X}_{\mathrm{FF},S}$ sont équivalents aux $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux proétales sur S. Or, $\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)$ sont les sections du fibré vectoriel $\mathscr{E}(D)$ associé à D sur $\mathcal{X}_{\mathrm{FF},S}$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{-}(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ sont les sections d'un faisceau gratte-ciel en la section $\iota_{\infty,S} \colon S \hookrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{FF},S}$. Or, on considère précisément une modification faiblement admissible de $\mathscr{E}(D)$ et donc le noyau est un $\mathbb{Q}_p$-système local proétale. On a directement que

$$\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}}^{+} \cong \underline{D} \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}}^{+},$$

ce qui permet de conclure que $\mathbb{V}$ est isotrivial de φ-module associé D. On conclut de même que le fibré associé est bien $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) = (D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}, \mathrm{id} \otimes d, \mathrm{Fil}^\bullet)$ et donc que $\mathbb{V}$ est fortement isotrivial. □

Proposition 3.9. — *Soient $\mathbb{V}$ un système local fortement isotrivial, $D = \mathbb{D}(\mathbb{V})$ et $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ le fibré plat filtré associé. Alors on a une suite exacte de faisceaux proétales*

$$0 \to \widehat{\mathbb{V}} \to \mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{-}(D_K, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) \to 0.$$

(6) C'est la version relative d'un théorème classique de Fargues et Fontaine (cf. [**27**, Théorème 9.3.1]).

Démonstration. — Premièrement, notons que le théorème est vrai si X_K est un point : c'est l'équivalence entre admissible et faiblement admissible (cf. [**18**], voir aussi [**27**, Chapitre 10]). D'après la proposition précédente, on sait que

$$\mathbb{V}' := \operatorname{Ker}\left[\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{-}(D_K, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)\right]$$

définit un $\mathbb{Q}_p$-système local proétale isotrivial de φ-module associé D. Elle permet de plus d'obtenir la surjectivité de la dernière application. Il suffit de justifier que $\widehat{\mathbb{V}} \cong \mathbb{V}'$. On sait qu'on a une inclusion $\widehat{\mathbb{V}} \hookrightarrow \mathbb{V}' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cr}}$. De plus, comme le théorème est vérifié pour les points, le germe de cette inclusion est un isomorphisme sur le germe de $\mathbb{V}'$ en tout point proétale de X_K. On en déduit que l'inclusion induit un isomorphisme $\widehat{\mathbb{V}} \cong \mathbb{V}$. □

Corollaire 3.10. — *Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local fortement isotrivial, $D = \mathbb{D}(\mathbb{V})$ et $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ le fibré plat associé. Supposons que tous les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}$ soient $\geqslant 0$. Alors on a une suite exacte de faisceaux proétales*

$$0 \to \widehat{\mathbb{V}} \to \mathbb{X}_{\mathrm{cr}}^{+}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^{+}(D_K, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^0 \to 0.$$

3.2. Groupes p-divisibles

Soit $\mathcal{G} \to X$ un groupe p-divisible obtenu par déformation d'un groupe p-divisible, i.e. il existe un groupe p-divisible G_0 sur k et une quasi-isogénie $\rho\colon G_0 \times_k X_k \dashrightarrow \mathcal{G} \times_X X_k$. Notons $D_0^+ := D^+(G_0)$ le module de Dieudonné covariant de G_0 sur $\mathrm{W}(k)$ et $D_0 := D_0^+ \otimes_{\mathrm{W}} K_0$ l'isocristal associé de Frobenius $\varphi_0\colon D_0 \to D_0$. On définit de plus le *module de Tate entier* de $\mathcal{G}$ par

$$\mathbb{T}_p(\mathcal{G}) := \varprojlim_n \mathcal{G}[p^n]_K$$

qui définit un $\mathbb{Z}_p$-faisceau proétale sur X_K et $\mathbb{V}_p(\mathcal{G}) := \mathbb{T}_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\mathbb{Q}}_p$ le *module de Tate rationnel* qui définit un $\mathbb{Q}_p$-faisceau proétale sur X_K.

Lemme 3.11 **(Partie cristalline).** — • *Le module de Tate $\mathbb{V}_p(\mathcal{G})$ définit un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial cristallin sur X_K, d'isocristal associé D_0.*

• *Le faisceau proétale défini par le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{G}} := \varprojlim_{[p]} \mathcal{G}$ est donné par*

$$\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}^{+}(D_0(1)) \cong \widetilde{\mathcal{G}}.$$

• *On a un diagramme commutatif de faisceaux proétales à lignes exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{T}_p(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\log_{\mathcal{G}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{V}_p(\mathcal{G}) \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[r] & \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \otimes \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont on déduit en particulier que $\ker\left(\log_{\mathcal{G}}\right) \cong \mathbb{V}_p(\mathcal{G})/\mathbb{T}_p(\mathcal{G}) = \mathcal{G}[p^\infty]$.

Démonstration. — Ce résultat est essentiellement contenu dans [**45**]. Le point crucial est que le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{G}}$ ne dépend que de la fibre spéciale de $\mathcal{G}$ et

$$\widetilde{\mathcal{G}} \cong \left(D_0 \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{cr},X_K}^{+}\right)^{\varphi=p}.$$

□

On décrit maintenant la partie de Rham.

Lemme 3.12 **(Partie de Rham).** — • *Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ associé à $\mathbb{V}_p(\mathcal{G})$ est de la forme $\mathcal{E} \cong D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ où $D_K := D_0 \otimes_{K_0} K$. De plus, il est fortement isotrivial.*

• *Les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}_p(\mathscr{G})$ sont inclus dans $\{0, 1\}$ et la filtration est donnée par $0 = \mathrm{Fil}^1\mathcal{E} \subset \mathrm{Fil}^0\mathcal{E} \subset \mathrm{Fil}^{-1}\mathcal{E} = \mathcal{E}$.*

Un corollaire direct est que les constructions tensorielles sur $\mathbb{V}_p(\mathcal{G})$ sont aussi isotriviales. Plus précisément, soient λ une partition d'un entier n et s_λ le projecteur de Schur associé. Alors $s_\lambda \cdot \mathbb{V}_p(\mathcal{G})$ est isotrivial de périodes cristallines $s_\lambda \cdot D_0$. En particulier, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V}_p(\mathcal{G})$ est un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial de φ-module associé $\mathrm{Sym}^k_{K_0} D_0$. Le corollaire suivant est une réinterprétation de [**41**, Proposition 5.15] :

Corollaire 3.13. — *Soit* (G, b, μ) *une donnée de Rapoport-Zink locale, c'est-à-dire une donnée de Shimura locale pour un cocaractère minuscule* μ *et un isocristal basique* b*. Alors sur l'espace rigide* $\mathrm{M}(G, b, \mu)$*, le groupe* p*-divisible universel définit un système local fortement isotrivial dont l'isocristal associé est donné par* b*.*

Exemple 3.14. — On reprend l'exemple 2.3. Par ce qui précède, $\mathbb{V}_{\mathrm{LT}}$ définit un $\mathbb{Q}_p$-système local fortement isotrivial cristallin sur $X_K = \mathrm{M}^0_{\mathrm{LT}}$. L'isocristal associé $(D, \varphi) = \mathbb{D}(\mathbb{V}_{\mathrm{LT}})$ est un k-isocristal de rang 2 dont le Frobenius s'écrit dans une base adaptée

$$\varphi \sim \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient que le revêtement universel s'écrit $\mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D(1)) = \big(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cr}, X_K}\big)^{\varphi^2 = p}$. Finalement, l'algèbre de Lie du groupe p-divisible universel est de rang 1 et on obtient la suite exacte fondamentale

$$0 \to \mathbb{V}_{\mathrm{LT}} \to \big(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cr}, X_K}\big)^{\varphi^2 = p} \to \widehat{\mathcal{O}}_X \to 0.$$

Notons que le dernier terme s'identifie à $\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(D_K)/\mathrm{Fil}^0\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D_K)$. En effet on a $\mathrm{Fil}^0(\mathcal{E}_{\mathrm{LT}}) \subsetneq \mathcal{E}_{\mathrm{LT}}$, où $\mathcal{E}_{\mathrm{LT}} \cong D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}$ est le fibré vectoriel associé à $\mathbb{V}_{\mathrm{LT}}$. Donc

$$\mathrm{Fil}^0\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D_K) = \mathrm{Fil}^0(\mathcal{E}_{\mathrm{LT}}) \otimes_K \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}, X_K} + \mathcal{E}_{\mathrm{LT}} \otimes_K t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}, X_K},$$

ce qui donne bien ce que l'on veut à partir de la suite exacte de Hodge de $\mathcal{E}_{\mathrm{LT}}$.

4. Cohomologies à coefficients

4.1. Cohomologies des systèmes locaux

4.1.1. *Cohomologie (pro)étale.* — Soit $\mathbb{V}^+$ un système local étale en $\mathbb{Z}_p$-réseaux sur X_K. Alors, par définition, $\mathbb{V}^+ = \varinjlim_n \mathbb{V}^+[p^n]$ et on définit

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}^+\big) \coloneqq \mathrm{holim}_n \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}^+[p^n]\big),$$

où les morphismes de transition dans la limite homotopique est la multiplication par p. Pour le $\mathbb{Q}_p$-système local associé, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, on pose

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big) \coloneqq \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}^+\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

En particulier, pour tout entier $i \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big) \coloneqq \big(\varprojlim_n \mathrm{H}^i_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}^+[p^n]\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\big).$$

La définition de la cohomologie proétale est plus directe, puisqu'on peut directement définir pour $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local proétale sur X_K le complexe $\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big)$ qui est un élément de $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$. Le foncteur $\mathbb{V} \mapsto \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big)$ est le foncteur dérivé des sections globales $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}(X_K)$. Rappelons le lemme suivant, qui est une conséquence de [**44**, Corollary 3.17 (ii)] :

Lemme 4.1. — *Supposons que X_K est un espace rigide lisse sur K, quasi-compact ou propre, et soit $\mathbb{V}^+$ un système local étale en $\mathbb{Z}_p$-réseaux sur X_K. Alors on a un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big).$$

4.1.2. *Cohomologie de groupes.* — Soit H un groupe prodiscret et soit M un H-module continu. La cohomologie de groupe de H est calculée à l'aide de cochaines continues homogènes. On note ce complexe de cochaines continues et homogènes, qui définit un élément de la ∞-catégorie des H-modules, par $\mathrm{R}\Gamma\big(H\,;\,M\big)$. On a directement le lemme suivant, qui est une conséquence directe de [**44**, Theorem 1.2] :

Lemme 4.2. — *Soient X_K un affinoïde sur K et $\bar{x}\colon \mathrm{Spa}(C, C^+) \to X_K$ un point géométrique. On considère un $\mathbb{Z}_p$-système local proétale $\mathbb{V}^+$ et $\mathbb{V}$ le $\mathbb{Q}_p$-système local proétale associé. Alors, le foncteur fibre induit un quasi-isomorphisme strict*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma\big(\pi_1^{\mathrm{alg}}\big(X_K\,,\,\bar{x}\big)\,;\,\mathbb{V}(\bar{x})\big).$$

En particulier, $\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big)$ *est un élément de* $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$.

La même relation entre la cohomologie proétale et la cohomologie de groupe devrait tenir pour la cohomologie étale, mais cette fois pour le groupe fondamental étale.

On veut définir la cohomologie étale d'un système local qui n'admet pas un réseau. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local sur un espace surconvergent X_K. D'après la définition de de Jong que l'on a rappelé au second point de la remarque 2.2 , on sait qu'il existe un recouvrement étale galoisien $\pi\colon Y_K \to X_K$ tel que $\mathbb{V}_{Y_K} \coloneqq \pi^*\mathbb{V}$ admet un réseau $\mathbb{V}^+_{Y_K}$. Notons $H = \mathrm{Aut}(Y_K/X_K)$. Alors, il est raisonnable de définir

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}\big) \coloneqq \mathrm{R}\Gamma\big(H\,;\,\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(Y_K\,;\,\mathbb{V}_{Y_K}\big)\big).$$

En effet, on vérifie facilement à l'aide de la suite spectrale de Hochschild-Serre que cette définition est indépendante du recouvrement choisi.

4.2. Cohomologie de de Rham

4.2.1. *Le complexe de de Rham à coefficients.* — Soit X_K un espace rigide ou un espace surconvergent lisse sur K. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet) \in \mathrm{Vect}^\bullet_\nabla(X_K)$ un fibré plat filtré. Alors on définit le *complexe de de Rham* :

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \coloneqq \Omega^\bullet_{\mathcal{E}} = \big(\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \Omega^1_{X_K} \xrightarrow{\nabla^{(2)}} \ldots\big).$$

Ce complexe définit un élément de $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$ que l'on note toujours $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})$ et son hypercohomologie définit des espaces que l'on note pour tout entier $i \geqslant 0$, $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})$. Si X_K est un espace Stein, muni de sa structure surconvergente naturelle alors $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})$ est un espace de Fréchet et si X_K est affinoïde, alors c'est un espace vectoriel de dimension finie, muni de sa topologie canonique séparée. Le complexe de de Rham est muni d'une filtration

$$\mathrm{Fil}^k\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E}) \coloneqq \big(\mathrm{Fil}^k\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Fil}^{k-1}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X_K}}\Omega^1_{X_K} \xrightarrow{\nabla^{(2)}} \dots\big),$$

qui est bien définie par la transversalité de Griffiths. Cette filtration définit une filtration sur $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})$ pour tout entier $i \geqslant 0$. Par exemple, la filtration sur $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})$ est définie directement à partir de la filtration sur $\mathcal{E}$. Si $(\mathcal{E},\nabla) = (\mathcal{O}_X, d)$ on note simplement $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)$ le complexe de de Rham associé.

Lemme 4.3. — *Supposons que X_K est Stein. Alors on a un quasi-isomorphisme strict*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E}) \cong \Omega^\bullet_{\mathcal{E}}(X_K) \cong \big(\mathcal{E}(X_K) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(X_K)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(X_K)}\mathcal{E}(X_K) \xrightarrow{\nabla^{(2)}} \cdots\big)$$

et de plus, si $\mathrm{Fil}^1\mathcal{E} = 0$, on a

$$\mathrm{Fil}^1\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E}) \cong \big(0 \to \Omega^1(X_K)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(X_K)}\mathrm{Fil}^0\mathcal{E}(X_K) \to \cdots\big).$$

Soit $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ l'anneau des périodes de de Rham et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \coloneqq \mathrm{Frac}(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}})$ le corps associé qui est muni d'une filtration. L'anneau $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est un espace de Fréchet sur K et donc dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$ la flèche naturelle

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}},$$

où le terme de gauche est le complexe de de Rham dont on a tensorisé les termes par $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ au-dessus de K, définit un quasi-isomorphisme strict dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_K)$. De plus, sur le membre de gauche la filtration est définie par

$$\mathrm{Fil}^k\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) = \mathrm{hocolim}_{i+j\geqslant k}\mathrm{Fil}^j\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K t^i\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}.$$

La preuve du lemme suivant est la même que [**15**, Example 3.30]

Lemme 4.4. — *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent on a*

$$\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) = \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Fil}^{-i}\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{i+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\nabla} \sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Fil}^{-i}\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^i\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \cdots\Big).$$

4.2.2. *Le petit complexe de de Rham des opers.* — Supposons que X_K est une courbe sur K et soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ un oper de poids (a,b). On définit le *petit complexe de de Rham* par

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}(X_K\,;\mathcal{E}) \coloneqq \left(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E} \xrightarrow{L_\nabla} \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}\right),$$

muni de la filtration induite par la filtration sur les gradués.

Proposition 4.5. — *Supposons que X_K est une courbe Stein ou un affinoïde surconvergent. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$ un oper de poids (a,b). On a un quasi-isomorphisme filtré*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}(X_K\,;\mathcal{E}) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E}).$$

Ce résultat permet de calculer la filtration précédente plus explicitement.

Lemme 4.6. — *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent on a un quasi-isomorphisme*

$$\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\mathcal{E})\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \cong \left(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{b+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{L_\nabla} \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right).$$

4.2.3. *Cohomologie de de Rham isotriviale.* — Le complexe de de Rham des fibrés plats fortement isotriviaux est particulièrement simple :

Lemme 4.7. — *Soit* $(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)=(D_K\otimes_K\mathcal{O}_{X_K},\mathrm{id}\otimes d,\mathrm{Fil}^\bullet)$ *un fibré plat filtré fortement isotrivial. Alors on a un quasi-isomorphisme entre complexes*

$$\mathrm{R\Gamma_{dR}}\big(X_K\,;\mathcal{E}\big)\cong \mathrm{R\Gamma_{dR}}(X_K)\otimes_K D_K.$$

En particulier, pour tout entier $i\geqslant 0$ *on a* $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\mathcal{E}\big)\cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K)\otimes_K D_K$.

4.3. Cohomologie de Hyodo-Kato

Soit X un schéma faiblement formel sur O_K. En suivant [**15**, 3.1.2], on définit la cohomologie de Hyodo-Kato surconvergente comme cohomologie rationnelle surconvergente rigide de la fibre spéciale X_k sur $\mathrm{O}^0_{K_0}$:

$$\mathrm{R\Gamma_{HK}}(X_k)\coloneqq \mathrm{R\Gamma_{rig}}(X_k/\mathrm{O}^0_{K_0}). \tag{4.1}$$

Rappelons que $\mathrm{O}^0_{K_0}$ désigne le log-schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathrm{O}_{K_0})$ muni de la structure logarithmique induite par $\mathbb{N}\to \mathrm{O}_{K_0}$, $1\mapsto 0$. Le complexe (4.1) est muni d'un endomorphisme de Frobenius φ et d'un endomorphisme N, *l'opérateur de monodromie*. Ces endomorphismes vérifient la relation $N\varphi=p\varphi N$. On va commencer par reprendre [**15**, 3.1.2] mais avec comme coefficients des systèmes locaux Zariski (cf. 3.2).

4.3.1. *Cohomologie log-rigide à coefficients.* — Rappelons qu'un *système local Zariski en isocristaux* sur X est un faisceau localement constant en K_0-espaces vectoriels pour la topologie de Zariski sur X_k, muni d'un endomorphisme de Frobenius. Soit E un système local Zariski en isocristaux sur X_k. On va suivre [**35**] pour définir la cohomologie rationnelle surconvergente rigide de X_k à coefficient dans E, notée

$$\mathrm{R\Gamma_{rig}}\big(X_k/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big).$$

On la définit à la main. Soit Y un k^0-log-schéma fin et soit E un système local Zariski en isocristaux sur Y. On choisit un recouvrement ouvert $Y=\bigcup_{i\in I}Y_i$ et, pour tout $i\in I$, une immersion exacte fermée $Y_i\hookrightarrow Z_i$ dans un log-schéma faiblement formel log-lisse sur $\mathrm{O}^0_{K_0}$. Pour tout sous-ensemble non vide $J\subset I$ on choisit une exactification

$$Y_J=\bigcap_{i\in J}Y_i\xrightarrow{\iota} Z_J\xrightarrow{f}\prod_{\mathrm{O}^0_{K_0}}(Z_i)_{i\in J}$$

du morphisme diagonal $Y_J\to\prod_{\mathrm{O}^0_{K_0}}(Z_i)_{i\in J}$. Soit $\Omega^\bullet_{Z_J/\mathrm{O}^0_{K_0}}$ le complexe de de Rham surconvergent sur le log-schéma faiblement formel Z_J. Lorsqu'on tensorise ce complexe de faisceaux par K_0, on obtient un complexe de faisceaux $\Omega_{Z^\bullet_{J,K_0}}$ sur le K_0-espace surconvergent Z_{J,K_0}. Le tube $]Y_J[_{Z_J}$ et la restriction $\Omega^\bullet_{]Y_J[_{Z_J}}\coloneqq \Omega^\bullet_{Z_{J,K_0}}\Big|_{]Y_J[_{Z_J}}$ ne dépendent que du système de plongements $\{Y_i\hookrightarrow Z_i\}_i$ et non de l'exactification (ι,f). On modifie le complexe de de Rham en $\Omega^\bullet_{]Y_J[_{Z_J}}\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_J})$, muni de la différentielle $d\otimes 1$. Le complexe de de Rham $\Gamma\big(]Y_J[_{Z_J}\,;\Omega^\bullet\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_J})\big)$ est alors muni de la topologie induite par celle du faisceau structural de l'espace surconvergent $]Y_J[_{Z_J}$.

Pour $J_1\subset J_2$ on a une restriction naturelle $\delta_{J_1,J_2}\colon]Y_{J_2}[_{Z_{J_2}}\to]Y_{J_1}[_{Z_{J_1}}$ et

$$\delta^{-1}_{J_1,J_2}\Omega^\bullet_{]Y_{J_1}[_{Z_{J_1}}}\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_{J_1}})\to \Omega^\bullet_{]Y_{J_2}[_{Z_{J_2}}}\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_{J_2}}).$$

Si on munit I d'un bon ordre, on obtient un espace surconvergent simplicial $]Y_\bullet[_{Z_\bullet}$, muni d'un complexe de faisceaux $\Omega^\bullet_{]Y_\bullet[_{Z_\bullet}}\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_\bullet}$. On considère le complexe $\mathrm{R\Gamma}\big(]Y_\bullet[_{Z_\bullet}\,;\Omega^\bullet\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_\bullet})\big)$ que l'on munit de la topologie induite par la topologie produit en chaque niveau cosimplicial. On rend tout indépendant des choix en considérant la limite sur tous les choix possibles : on définit le complexe dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{K_0})$:

$$\mathrm{R\Gamma_{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big)\coloneqq \mathrm{hocolim}\Gamma\big(]Y_\bullet[_{Z_\bullet}\,;\Omega^\bullet\otimes_{K_0}\mathrm{sp}^{-1}(E\big|_{Y_\bullet}\big),$$

où la limite est sur la catégorie des hyper-recouvrements construite à partir des données décrites ci-dessus. Posons

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big) \coloneqq \widetilde{\mathrm{H}}^i\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big),\ \mathrm{H}^i_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big) \coloneqq \mathrm{H}^i\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big).$$

Le complexe $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}_{K_0}\,;E\big)$ est muni d'un endomorphisme de Frobenius φ défini par le produit d'un relèvement de Frobenius sur Z_i et de l'endomorphisme de Frobenius sur les restrictions de E. Lorsque Y est log-lisse sur k^0 on a aussi un opérateur de monodromie N défini par la connexion logarithmique et satisfaisant $p\varphi N = N\varphi$. On renvoie à [**15**, Proposition 3.2] pour la preuve du lemme suivant, qui est la même qu'à coefficients constants.

Proposition 4.8. — *Soit Y un schéma semi-stable sur k muni d'une structure logarithmique induite, E un système local Zariski en isocristaux. Alors*

1. *Si Y est quasi-compact, $\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big)$ est un K_0-espace vectoriel de dimension finie, muni de l'unique topologie séparée et localement convexe.*
2. *L'endomorphisme φ sur $\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}\big(Y/\mathrm{O}^0_{K_0}\,;E\big)$ est un homéomorphisme.*

On en déduit le lemme suivant, analogue à [**15**, Lemma 3.4] (cf. [**33**, Lemma 4.7] [**34**, Cor. 3.2]) :

Lemme 4.9. — *Soit Y un espace Stein lisse ou un affinoïde surconvergent lisse et soit E un système local Zariski en isocristaux. Alors pour tout $i \geqslant 0$, l'application : $\Omega^i_E(Y) \to \Omega^{i+1}_E(Y)$ est stricte, d'image fermée.*

4.3.2. *Cohomologie de Hyodo-Kato isotriviale.* — Si $E = \underline{D}$ est constant, on définit la cohomologie de Hyodo-Kato isotriviale

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \coloneqq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(X_k\,;E\big).$$

De même que précédemment, pour $i \geqslant 0$ on note

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \coloneqq \widetilde{\mathrm{H}}^i\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(X_k\,;D\big),\ \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \coloneqq \mathrm{H}^i\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{rig}}\big(X_k\,;D\big).$$

Proposition 4.10. — *Si D est un isocristal alors on a un isomorphisme entre complexes de φ-modules*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k) \otimes_{K_0} D,$$

où le membre de droite est muni du Frobenius produit. En particulier, pour tout entier $i \geqslant 0$ on a un isomorphisme entre φ-modules $\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k) \otimes_{K_0} D$.

4.3.3. *Isomorphisme de Hyodo-Kato isotrivial.* — Soit X un schéma faiblement formel semi-stable sur O_K. Soient D un isocristal sur k et $(\mathcal{E}, \nabla) \coloneqq (D_K \otimes_K \mathcal{O}_{X_K}, d \otimes \mathrm{id})$ un fibré plat fortement isotrivial où $D_K \coloneqq D \otimes_{K_0} K$. On a un *morphisme de Hyodo-Kato isotrivial*

$$\iota_{\mathrm{HK}} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\mathcal{E}\big).$$

En effet, on commence par considérer le morphisme de Hyodo-Kato classique

$$\iota_{\mathrm{HK}} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K).$$

On applique le produit tensoriel par D qui, comme $D \otimes_{K_0} K = D_K$, définit une application

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k) \otimes_{K_0} D \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K) \otimes_K D_K,$$

qui devient un quasi-isomorphisme strict lorsqu'on applique $\otimes_{K_0} K$. Comme les connexions sont fortement isotriviales, cette application est un morphisme

$$\iota_{\mathrm{HK}} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\mathcal{E}\big),$$

qui définit un quasi-isomorphisme strict

$$\iota_{\mathrm{HK}} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;D\big) \otimes_{K_0} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\mathcal{E}\big).$$

5. Cohomologies syntomiques isotriviales

On définit la cohomologie syntomique (géométrique) surconvergente d'un $\mathbb{Q}_p$-système local fortement isotrivial $\mathbb{V}$ d'isocristal associé D et de fibré associé $(\mathcal{E}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons que les pentes de D sont toutes négatives. On a une application $\iota \colon \widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+ \hookrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (cf. [**15**, 3.2.1] pour la définition de $\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+$ et de ι) et on définit dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$ le complexe

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V}) \coloneqq \Big[\Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\Big]^{N=0,\varphi=1} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)/\mathrm{Fil}^0\Big].$$

Rappelons que $[- \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} -] \coloneqq \mathrm{holim}(- \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} - \leftarrow 0)$ désigne la fibre dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$ de l'application $\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota$ et $\Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\Big]^{N=0,\varphi=p^i}$, pour $i\in\mathbb{N}$ désigne l'espace propre dérivé de N et φ i.e. la limite homotopique du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+ & \xrightarrow{\varphi-p^i} & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+ \\
\big\downarrow{\scriptstyle N} & & \big\downarrow{\scriptstyle N} \\
\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+ & \xrightarrow{p\varphi-p^i} & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+
\end{array}$$

Posons pour tout entier $i\geqslant 0$

$$\mathrm{HK}(X_C, D, i) \coloneqq \Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\Big]^{N=0,\varphi=p^i},$$
$$\mathrm{DR}(X_C, \mathcal{E}, i) \coloneqq \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)/\mathrm{Fil}^i,$$

de sorte que

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)) = [\mathrm{HK}(X_C, D, i)\to \mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E},i)]\,.$$

Lorsque $i=1$, on omet simplement le i pour alléger les notations et on note simplement $\mathrm{HK}(X_C,D)\coloneqq \mathrm{HK}(X_C,D,1)$ et $\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E})\coloneqq\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E},1)$.

Exemple 5.1. — Supposons que X est Stein et géométriquement irréductible. Alors

$$\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+\big)^{\varphi=1,N=0} = \big(D\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+\big)^{\varphi=1}\cong X_{\mathrm{st}}^+(D).$$

De même, $D_K = \mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})$ qui est muni de la filtration induite. Donc $\widetilde{\mathrm{H}}^0_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V})$ est le noyau du morphisme naturel

$$X_{\mathrm{st}}^+(D)\to\big(D_K\otimes_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)/\mathrm{Fil}^0.$$

Si la filtration sur D_K est admissible, alors $\widetilde{\mathrm{H}}^0_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V})$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Dans tous les cas, $\mathrm{Fil}^0(D_K\otimes_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\cap X_{\mathrm{st}}(D)$ est fermé dans $X_{\mathrm{st}}^+(D)$ et donc $\widetilde{\mathrm{H}}^0_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V})$ est classique.

5.1. La partie Hyodo-Kato

Lemme 5.2. — *Supposons que X est quasi-compact. On a pour $i\geqslant 0$ un isomorphisme naturel*

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i(\mathrm{HK}(X_C,D))\cong\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\big)^{N=0,\varphi=p}$$

entre espaces de Banach et $\widetilde{\mathrm{H}}^i(\mathrm{HK}(X_C,D))$ est classique.

Démonstration. — L'argument est le même que celui de [**15**, Lemma 3.20] et s'appuie sur le fait que $\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)$ est de dimension finie. On commence par montrer que la cohomologie du complexe $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+$ est classique et isomorphe à $\mathrm{H}^*_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+$, qui est un module libre de rang fini sur $\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+$. Pour ce faire, considérons le triangle exacte

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\to\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+\to\big(\tau_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{st}}^+.$$

Mais comme $\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)$ est un K_0-espace vectoriel de dimension finie, on a un quasi-isomorphisme strict
$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}.$$
Puisque $\widetilde{\mathrm{H}}^0\big(\tau_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)=0$ on obtient
$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}^0\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big),$$
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\tau_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big),\ i\geqslant 1.$$
Ainsi, par une récurrence immédiate, on conclut que pour tout entier $i\geqslant 0$ on a
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big) \cong H^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}.$$
Pour la suite de la preuve on utilise que si M est un (φ,N)-module fini effectif, alors on a les suites exactes courtes suivantes
$$(5.1)\qquad \begin{gathered} 0\to M\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\to M\otimes_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\xrightarrow{N} M\otimes_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\to 0,\\ 0\to (M\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi=p}\to M\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\xrightarrow{\varphi-p} M\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\to 0.\end{gathered}$$
La preuve est alors la même que [**15**, Lemma 3.20] en posant $\mathrm{HK} \coloneqq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}$ et où on montre, d'abord grâce à la première suite exacte courte, que
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big([\mathrm{HK}]^{N=0}\big)\cong\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0},$$
puis en posant $D=[\mathrm{HK}]^{N=0}$ on montre qu'on a une suite exacte courte
$$0\to\widetilde{\mathrm{H}}^i([D]^{\varphi=p})\to\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\xrightarrow{\varphi-p}\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\to 0,$$
ce qui permet de conclure grâce à la deuxième suite exacte courte rappelée. □

Lemme 5.3. — *Supposons que X est Stein et soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement Stein de X. Alors,*

- *la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}$ est classique et on a pour tout $i\geqslant 0$*
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\cong\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\cong\varprojlim_n\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big),$$
- *pour tous $i,r\geqslant 0$ la cohomologie $\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{HK}(X_C,D)\big)$ est classique et on a un isomorphisme naturel*
$$\mathrm{H}^i\big(\mathrm{HK}(X_C,D)\big)\cong\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p}.$$
En particulier, $\mathrm{H}^i\big(\mathrm{HK}(X_C,D)\big)$ est un Fréchet. De plus,
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\Big(\Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\Big]^{N=0}\Big)\cong\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0}\cong\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}.$$

Démonstration. — On commence par montrer qu'on a un quasi-isomorphisme strict naturel
$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big).$$
On calcule la cohomologie des deux côtés. Pour tout entier $i\geqslant 0$, on a une application naturelle
$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\to\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}},$$
qui est un quasi-isomorphisme strict et par le même argument que le lemme précédent on en déduit que
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\cong\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}.$$
Comme précédemment, on obtient le triangle distingué
$$\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\to\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\to\mathrm{holim}_n\big((\tau_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D))\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big).$$
On a
$$\widetilde{\mathrm{H}}^0\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\cong\varprojlim_n\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big),$$
$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\cong\widetilde{\mathrm{H}}^i\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)=0,\ i\geqslant 1.$$

La dernière annulation se déduit du critère de Mittag-Leffler dans la catégorie des espaces vectoriels localement convexes. En effet, comme le système projectif $\{\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\}$ est de Mittag-Leffler, il en est de même de $\{\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\}$. Le même argument que celui de la preuve du lemme précédent implique alors que pour tout entier $i \geqslant 0$

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i\big(\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)\big) \cong \varprojlim_n \big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big).$$

Pour conclure la preuve du quasi-isomorphisme strict naturel du début, il suffit de remarquer que comme les $\mathrm{H}^i(U_{n,k}\,;\,D)$ sont des K_0-espaces vectoriels de dimension finie, l'application naturelle

$$\big(\varprojlim_n \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}} \to \varprojlim_n \big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)$$

est un quasi-isomorphisme strict. Ceci démontre le premier point du lemme. Pour le second point on reprend la preuve de [**15**, Lemme 3.28]. La preuve se fait comme dans le lemme précédent et on obtient, en passant à la limite sur 5.1 pour $M = \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)$, les suites exactes

$$0 \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}} \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}} \xrightarrow{N} \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}} \to 0,$$
$$0 \to \big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=p} \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}} \xrightarrow{\varphi-p} \mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}} \to 0.$$

On a utilisé l'annulation de

$$\widetilde{\mathrm{H}}^j\mathrm{holim}_n\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big) \text{ et de } \widetilde{\mathrm{H}}^j\mathrm{holim}_n\big(\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=p}\big)$$

pour $j \geqslant 1$. L'annulation de la première cohomologie provient de ce que $\{\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\}$ est un système projectif satisfaisant à la condition de Mittag-Leffler. La seconde annulation se démontre en relevant le système projectif d'espaces de Banach $\{\big(\mathrm{H}^i_{\mathrm{HK}}(U_{n,k}\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=p}\}$ en un système projectif d'espaces de Banach-Colmez de dimensions (d_i, h_i) avec $d_i, h_i \geqslant 0$. Si on fixe l'un des espaces de Banach-Colmez dans le système projectif, les images des autres termes dans ce dernier forment une chaine de dimension décroissante. Mais comme tout sous-espace de l'espace qu'on a fixé est de hauteur positive, ces espaces se stabilisent. On en déduit que le système projectif satisfait à la condition de Mittag-Leffler donc est acyclique : on en déduit l'annulation de la cohomologie. Ceci termine la démonstration du lemme. □

5.2. La partie de Rham

Si $(D_K, \mathrm{Fil}^\bullet)$ est un K-espace de Fréchet filtré dont les sauts de la filtration sont négatifs, alors on a défini $X^+_{\mathrm{dR}}(D_K) \coloneqq D_K\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$. De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$ posons

$$X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_k \coloneqq X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)/\mathrm{Fil}^k\left(D_K\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right).$$

De plus, pour $m \in \mathbb{Z}$ un entier posons

$$X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)^m \coloneqq \mathrm{Fil}^m\left(D_K\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right),$$

et si $m \leqslant k$ on définit

$$X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)^m_k \coloneqq X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)^m/\mathrm{Fil}^k\left(D_K\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right).$$

Par exemple pour $k = 0, 1$, si D_K est de dimension finie et que l'on choisit une base $e_1, \ldots, e_r$ de D_K qui est compatible avec la filtration, on a

$$\mathrm{Fil}^0\left(D_K \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right) = \bigoplus_{i=0}^r t^{a_i}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}e_i, \quad \mathrm{Fil}^1\left(D_K \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\right) = \bigoplus_{i=0}^r t^{a_i+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}e_i,$$

où $0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_r$ sont des entiers positifs qui représentent les opposés des sauts de la filtration, considérés avec multiplicité. On a alors

$$X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_0 \cong \bigoplus_{i=0}^r \mathrm{B}_{a_i}, \quad X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1 \cong \bigoplus_{i=0}^r \mathrm{B}_{a_i+1}.$$

De même, on obtient

$$X_{\mathrm{dR}}^{+}(D_K)_1^0 \cong \bigoplus_{i=0}^{r}(t^{a_i}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})/(t^{a_i+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) \cong \bigoplus_{i=0}^{r} C(a_i).$$

Une conséquence du lemme 4.4 est le lemme suivant :

Lemme 5.4. — *Supposons que X est Stein et soit $(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^{\bullet})$ un fibré plat filtré fortement isotrivial dont les sauts de la filtration sont $\leqslant 0$. Alors on a un quasi-isomorphisme strict*

$$\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E}) \cong X_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathcal{E}(X_K))_1 \to X_{\mathrm{dR}}^{+}(\Omega_{\mathcal{E}}^1(X_K))_0 \to \dots$$

5.2.1. *Le cas des opers.* — Supposons que X_K soit une courbe Stein ou affinoïde et que $\mathcal{E}$ soit un oper de poids (a,b) avec $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $b>a$. L'intérêt des opers est que l'on peut calculer la cohomologie de $\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E})$ qui apparaît dans le diagramme fondamental.

Lemme 5.5. — *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a \to 0.$$

De plus

$$\mathrm{H}^1\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a.$$

Démonstration. — Rappelons que $\mathrm{H}^0 \coloneqq \mathrm{H}^0\mathrm{DR}\big(X_C,\mathcal{E}\big)$ est le noyau de la connexion

$$(\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})/\mathrm{Fil}^1 \xrightarrow{\nabla\otimes\mathrm{id}} (\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})/\mathrm{Fil}^0.$$

On commence par montrer que ce noyau est isomorphe au noyau de

$$\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \xrightarrow{L_\nabla} \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a.$$

D'après le lemme 2.11, on a des décompositions

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} &\cong \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \oplus \mathrm{Fil}^{-b+1}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+},\\ \Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} &\cong \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \oplus \tfrac{\mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}}{\mathrm{Fil}^{-a}}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+},\end{aligned}$$

et par définition des opers, la différentielle induit un isomorphisme

$$\mathrm{Fil}^{-b+1}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \xrightarrow{\sim} \tfrac{\mathcal{E}(X_K)}{\mathrm{Fil}^{-a}}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}.$$

De plus, d'après la partie sur la filtration du lemme 2.11 on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap\mathrm{Fil}^1 &= \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{b+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+},\\ \mathrm{Gr}_a\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap\mathrm{Fil}^0 &= \mathrm{Gr}_a\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{a}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+},\end{aligned}$$

et comme, par définition, ∇ induit des isomorphismes $\mathrm{Fil}^{-q}/\mathrm{Fil}^{-q+1} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Fil}^{-q-1}/\mathrm{Fil}^{-q})\otimes_{\mathcal{O}(X_K)} \Omega^1(X_K)$ pour tout entier q tel que $a\leqslant q\leqslant b-1$, on en déduit que d induit un isomorphisme

$$(\mathrm{Fil}^{-b+1}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\cap\mathrm{Fil}^1 \xrightarrow{\sim} (\tfrac{\mathcal{E}(X_K)}{\mathrm{Fil}^{-a}}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\cap\mathrm{Fil}^0.$$

Ainsi, comme annoncé, on a bien

$$\mathrm{H}^0 = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \xrightarrow{L_\nabla} \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a\big).$$

En appliquant le lemme du serpent au diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] \arrow[d, "L_\nabla"] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a \arrow[r] \arrow[d, "L_\nabla"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a \arrow[r, equal] & \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a & \end{tikzcd}$$

on obtient la suite exacte
$$0 \to \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E}) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a \to 0,$$
et l'isomorphisme
$$\mathrm{H}^1\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_a.$$
□

5.3. Le diagramme fondamental

La forme la plus générale du diagramme fondamental est la suivante :

Proposition 5.6. — *Soit X un schéma faiblement formel affine ou Stein que l'on suppose géométriquement irréductible et tel que X_K est lisse sur K. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local fortement isotrivial d'isocristal associé D et de fibré associé $\mathcal{E} = (\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons que les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}$ sont tous positifs et notons a le plus petit poids de Hodge-Tate. On a une application naturelle entre suites exactes strictes :*
$$\begin{tikzcd}
X^1_{\mathrm{cr}}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)^0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
D_K\otimes_K \mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r, "\nabla\otimes\mathrm{id}"] & \big(\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\big)^{\nabla=0}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
Dans ce diagramme,
$$\mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E}) \coloneqq \mathrm{Ker}\,\big(X^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}(X_K))_1 \to X^+_{\mathrm{dR}}(\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K))_0\big),$$
$$X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)^0 \coloneqq \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p,N=0} \cap \mathrm{Fil}^0\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$
De plus,
$$\ker(\gamma) = X^{-a}_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)^{-a-1} \coloneqq \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p^{-a},N=0}\cap\mathrm{Fil}^{-a-1}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$

Démonstration. — En suivant le début de la preuve de [**15**, Proposition 3.36], notons qu'on peut remplacer $\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}$ par $\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}$ dans le diagramme, ce qui facilite les questions topologiques. Plus précisément, l'inclusion naturelle $\iota_{\mathrm{st}}\colon \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}$ induit un diagramme commutatif dans $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p}$
$$\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p,N=0} \arrow[r, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] \arrow[d, "1\otimes\iota_{\mathrm{st}}"] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[d, equal] \\
\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p,N=0} \arrow[r, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1}
\end{tikzcd}$$
Pour la ligne du dessous du diagramme, on a la suite exacte qui définit la cohomologie de de Rham du fibré plat $(\mathcal{E},\nabla)$ auquel on applique $\cdot\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1}$,
$$0 \to D_K\otimes_K\mathrm{B}_{a+1} \to \mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \xrightarrow{\nabla\otimes\mathrm{id}} \big(\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\big)^{\nabla=0}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \to 0.$$
La suite reste exacte puisque on tensorise-complète une suite exacte de Fréchet par un Banach. L'application γ est induite par la composée
$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\text{mod } t^{a+1}} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1}.$$
Notons que $\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \subset \mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{a+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \dots$. Ainsi, l'application β est induite par la composée
$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \to \mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \xrightarrow{\text{mod } t^{a+1}} \big(0 \to \Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K C(a) \to \cdots\big).$$
Ainsi, comme on a une application $\widetilde{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \to \mathrm{H}^1\mathrm{HK}(X_C,D)$ et que $\mathrm{H}^1\mathrm{HK}(X_C,D) \cong \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p}$ on obtient directement le carré commutatif
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p} \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota\ \text{ mod } t^{a+1}"] \\
\Omega^1_{\mathcal{E}}(X_K)^{\nabla=0}\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1}
\end{tikzcd}$$

On a des morphismes entre triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+\big]^{\varphi=p,N=0} \arrow[r, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^1 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K^R\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \arrow[r] \arrow[d, "\bmod t^{a+1}"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] \arrow[d, "\bmod t^{a+1}"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^1 \arrow[d] \\
\sigma_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1} \arrow[r] & \mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{a+1}
\end{tikzcd}$$

où $\sigma_{\geqslant 1}$ désigne la troncation dite « bête » en degré $\geqslant 1$. Il reste à analyser l'image de la dernière flèche dans la suite exacte

$$X^1_{\mathrm{cr}}(D)\to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E})\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}(X_C\,;\,\mathbb{V}(1))\to \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p}\xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota}\mathrm{H}^1(\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E})).$$

Mais l'image de ι_{HK} est contenue dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)$ et donc l'image de la dernière flèche est dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\otimes_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^1\cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(X_K)\widehat{\otimes}_K X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_0$ puisqu'elle s'identifie à

$$X^+_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)(1)\big)\to X^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big))_1.$$

Ainsi on obtient la suite exacte

$$X^1_{\mathrm{cr}}(D)\to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E})\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)\to X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)^0\to 0.$$

Finalement, il reste à montrer que $\ker(\gamma)=X^{-a}_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)^{-a-1}$. On énonce le lemme suivant qui est une généralisation, obtenue par dévisage, du lemme [**15**, Lemma 3.30] :

Lemme 5.7. — *Soit M un (φ,N)-module fini sur K_0 et soient $a,b\in\mathbb{N}$ des entiers. Alors*

$$0\to\big(M\otimes_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p^b,N=0}\xrightarrow{t^{a+1}}\big(M\otimes_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p^{a+b+1},N=0}\to M\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{a+1}$$

est exacte. De plus, la dernière application est surjective si les pentes de M sont $\leqslant b$.

On déduit de ce lemme la suite exacte

$$0\to X^{-a}_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)\xrightarrow{t^{a+1}}X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\big)\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}_{a+1}.$$

Ceci conclut la preuve de la proposition. □

Remarque 5.8. — Que peut-on dire de l'injectivité ou la surjectivité de la flèche $X^1_{\mathrm{cr}}(D)\to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E})$? On se place sous les conditions de la proposition 5.6. Supposons que $\mathrm{H}^0_{\mathrm{syn}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}(1)\big)=0$. On a la suite exacte

$$0\to \mathrm{H}^0_{\mathrm{syn}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}(1)\big)\to X^1_{\mathrm{st}}(D)\to X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1,$$

on en déduit que $X^1_{\mathrm{st}}(D)\to X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1$ est injective. Comme cette application ne peut pas être un isomorphisme, elle n'est pas surjective. Ceci montre que $\mathrm{H}^0_{\mathrm{syn}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}(1)\big)=0$ si et seulement si $X^1_{\mathrm{st}}(D)\hookrightarrow X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1$. De plus, on peut montrer que $X^1_{\mathrm{st}}(D)\twoheadrightarrow X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1$ si et seulement si le noyau est de même dimension sur $\mathbb{Q}_p$ que le rang de $\mathbb{V}$.

L'application $X^1_{\mathrm{st}}(D)\to X^+_{\mathrm{dR}}(D_K)_1$ est surjective lorsque la filtration « ne bouge pas ». Un exemple est si la filtration sur $D_K\otimes_K\mathcal{O}_{X_K}$ est induite par une filtration faiblement admissible (par rapport au φ-module D) sur D_K. Ceci correspond à des coefficients donnés par exemple par une représentation galoisienne V de dimension finie, auquel cas on a simplement

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_K\,;\,V(1)\big)\cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_K\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big)\otimes_{\mathbb{Q}_p}V.$$

5.4. Le diagramme fondamental pour les opers

Proposition 5.9. — *Soit X est un schéma faiblement formel Stein que l'on suppose géométriquement irréductible et tel que X_K soit une courbe lisse sur K. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-oper de poids (a,b) fortement isotrivial d'isocristal associé D et de fibré associé $\mathcal{E}=(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)$. Supposons que $a\geqslant 0$. On a une application naturelle entre suites exactes strictes :*

$$\begin{tikzcd}
t^a X^1_{\mathrm{cr}}(D[a]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & t^a X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)[a]\big) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
D_K \otimes_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r, "L_\nabla"] & \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme

$$X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)[a]\big) \coloneqq \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p^{1-a}}$$
$$X^1_{\mathrm{cr}}(D[a]) \coloneqq \big(D\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=p^{1-a}},$$

Démonstration. — On reprend mutatis mutandis la preuve de la proposition 5.6. D'après la proposition 4.5, on a

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \coloneqq \Big[\Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}\Big]^{N=0,\varphi=p} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^1\Big].$$

Comme précédemment, on peut remplacer $\widehat{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{st}}$ par $\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}$. Dans le diagramme, la ligne du dessous est donnée par le petit complexe de de Rham auquel on applique $\cdot\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}$.

$$0\to D_K\otimes_K\mathrm{B}_{b+1}\to\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}\xrightarrow{L_\nabla\otimes\mathrm{id}}\mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}\to\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}\to 0.$$

La suite reste exacte puisque on tensorise-complète une suite exacte de Fréchet par un Banach. L'application γ est induite par la composée

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\xrightarrow{\mathrm{mod}\ t^{b+1}}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}.$$

On a isomorphisme de complexes $\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)\cong\mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{b+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\to\mathrm{Gr}_a\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{a+1}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Ainsi, l'application β est induite par la composée

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)\to\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)\xrightarrow{\mathrm{mod}\ t^{b+1}}\big(0\to\mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^{a+1}\mathrm{B}_{b+1}\to 0\big).$$

Ainsi, comme dans la preuve de la proposition 5.6, en utilisant que l'image de $\widetilde{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ dans $X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)$ est $X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)^0$ comme on l'a démontré, on obtient le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & X^1_{\mathrm{st}}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_k\,;\,D)\big)^0 \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota\ \ \mathrm{mod}\ t^{b+1}"] \\
\mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1}
\end{tikzcd}$$

On a des morphismes entre triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big]^{\varphi=p,N=0} \arrow[r, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^1 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Fil}^1\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ t^{b+1}"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ t^{b+1}"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^1 \arrow[d] \\
\sigma_{\geqslant 1}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1}
\end{tikzcd}$$

Il reste à rectifier la première flèche horizontale en haut du diagramme fondamental. Notons que

$$X^1_{\mathrm{cr}}(D)\cong\big(D[a]\otimes_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=p^{a+1}},$$

et donc en comparant la suite exacte du lemme 5.7 et celle du lemme 5.5 on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t^a X^1_{\mathrm{cr}}(D[a]) \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{cr}}(D) \arrow[r] \arrow[d] & D_K\otimes_K\mathrm{B}_a \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^0\mathrm{DR}(X_K,\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\otimes_K\mathrm{B}_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ainsi, la première flèche verticale ci-dessus donne la première flèche horizontale du diagramme fondamental. Ceci finit la preuve du diagramme pour les opers. □

6. Théorèmes de comparaison

Le but de cette section est de démontrer le théorème de comparaison syntomique-proétale. L'énoncé est le suivant :

Théorème 6.1. — *Soit X un schéma faiblement formel, Stein et semi-stable sur O_K. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial et $i \geqslant 0$ un entier. Supposons que les poids de Hodge-Tate de $\mathbb{V}$ soient tous positifs, alors il existe, dans $\mathscr{D}(\mathrm{C}_{\mathbb{Q}_p})$, un morphisme*

$$\alpha_{\mathbb{V}(i)} : \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big),$$

qui est un quasi-isomorphisme strict après troncation par $\tau_{\leqslant i}$. En particulier, on a des isomorphismes topologiques

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big) \cong \mathrm{H}^j_{\mathrm{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(i)\big)$$

pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant i$.

Remarque 6.2. — Notons que dans le théorème 6.1, si $a \geqslant 0$ est le poids de Hodge-Tate minimal de $\mathbb{V}$, alors on peut remplacer la troncation par $\tau_{\leqslant i+a}$.

6.1. Premiers cas

À titre d'exemple, on commence par utiliser des théorèmes de comparaison connus pour en déduire le théorème dans certains cas.

6.1.1. *Le cas à coefficients triviaux.* — Commençons par montrer le théorème dans le cas où $\mathbb{V} = \underline{V}$ pour V une représentation cristalline de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Notons que si V est une puissance du caractère cyclotomique, alors le théorème est l'un des théorèmes principaux de [**15**]. Dans ce cas on a un quasi-isomorphisme évident

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Q}_p(i)\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pét}}\big(X_C\,;\,\underline{V}(i)\big).$$

Il suffit donc de montrer

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Q}_p(i)\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\underline{V}(i)\big),$$

ce qui se fait en deux étapes. Comme V est cristalline à poids de Hodge-Tate positifs on a

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \cong D \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{st}}, \quad V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \cong D_K \otimes_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}.$$

Pour la partie Hyodo-Kato on obtient un quasi-isomorphisme

$$[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}]^{N=0,\varphi=p^i} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong [\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V]^{N=0,\varphi=p^i}$$

et pour la partie de Rham

$$\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K)\widehat{\otimes}^R_K\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)/\mathrm{Fil}^i.$$

Or, comme les poids de V sont positifs, dans $\mathscr{D}(C_{\mathbb{Q}_p})$ on a des quasi-isomorphismes entre les cônes

$$\Big[(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi=p^i} \to (D_K \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}})/\mathrm{Fil}^i\Big] \cong [(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}})^{\varphi=p^i} \to \big(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^i]$$

et entre les cônes

$$\Big[(D \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi=p^i} \to (V \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}})/\mathrm{Fil}^i\Big] \cong [(D \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}})^{\varphi=p^i} \to \big(D_K \otimes_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^i].$$

Ce qui fournit finalement un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Q}_p(i)\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pét}}\big(X_C\,;\,\underline{V}(i)\big).$$

6.1.2. *Le cas propre.* — Le cas propre et semi-stable est le plus simple puisqu'on a des théorèmes de comparaison directs. Dans ce cas, par les théorèmes de comparaison de [**44**] on a des isomorphismes

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}},$$
$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,D \otimes \mathbb{B}^+_{\mathrm{st},\mathrm{X_K}}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big) \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}.$$

Le premier isomorphisme donne

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^1\big) \cong \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^1,$$

et le second isomorphisme permet d'obtenir

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D(1))\big) = \big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big) \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big]^{N=0,\varphi=p}.$$

De plus, si on applique $\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\cdot\big)$ à la suite exacte

$$0 \to \mathbb{V}(1) \to \mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D(1)) \to \mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^1 \to 0,$$

on obtient le triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D(1))\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\big(\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^1\big)\big).$$

Ceci identifie $\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ à la fibre de l'application

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{X}^+_{\mathrm{cr}}(D(1))\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\big(\mathbb{X}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^1\big)\big).$$

Or cette application s'identifie à

$$\big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big) \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big]^{N=0,\varphi=p} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\iota} \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big) \otimes_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^1,$$

dont la fibre est la cohomologie syntomique $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$. Ceci donne le quasi-isomorphisme dont on démontre facilement qu'il est strict.

6.2. Derniers cas

6.2.1. *Le cas quasi-compact.* — On suppose que X est quasi-compact et semi-stable. Pour démontrer le théorème de comparaison on commence par procéder comme dans le cas propre, ce qui donne un triangle exact

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E},\nabla,\mathrm{Fil}^\bullet)/\mathrm{Fil}^0\big).$$

Le terme du milieu s'écrit

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)\big) \cong \big[\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{B}_{\mathrm{cr}}\big) \otimes_{K_0} D\big]^{\varphi=1},$$

et le terme de droite est la cofibre de l'application naturelle

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_K\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}\big),$$

où $\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}} \coloneqq \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. La preuve se passe comme dans le cas propre mais elle est un peu plus subtile. On reformule légèrement [**4**, Theorem 6.5] et [**5**, Theorem 4.1] tout en les traduisant en des énoncés topologiques plutôt que condensés.

Proposition 6.3. — *Soit X un schéma faiblement formel affine et semi-stable sur O_K tel que X_K est lisse. Soit $\mathbb{V}$ un système local fortement isotrivial de φ-module associé D. Alors*

- *Il existe un quasi-isomorphisme strict*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \cong \frac{\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(X_K\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)}{\mathrm{Fil}^0}.$$

- *Il existe un quasi-isomorphisme strict*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)\big) \cong \Big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\widehat{\otimes}^R_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{st}}\Big]^{\varphi=1,N=0}.$$

Démonstration. — On commence par le premier point. D'après le théorème [**4**, Theorem 6.5], en considérant les points des complexes solides on a un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}\big) \cong \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\widehat{\otimes}^R_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big),$$

compatible avec la filtration, ce qui signifie en particulier qu'on a un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \cong \mathrm{Fil}^0\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\widehat{\otimes}^R_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$

Justifions que ces quasi-isomorphismes sont stricts. Comme X_K est un affinoïde surconvergent sa cohomologie de de Rham est de dimension finie et le terme de droite le quasi-isomorphisme est représentable par un complexe parfait de $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-modules : il a donc une topologie séparée localement convexe canonique, ce qui permet de justifier que le quasi-isomorphisme est strict. Pour le second isomorphisme le raisonnement est le même. Ainsi, du triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big)$$

on déduit un quasi-isomorphisme strict

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{V}^+_{\mathrm{dR}}\big) \cong \frac{\big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K\,;\,\mathcal{E})\otimes^R_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)}{\mathrm{Fil}^0},$$

ce qui démontre le premier point. Pour le second point, on utilise [**5**, Theorem 4.1] (voir aussi [**6**, Proposition 3.11]) qui, après avoir inversé t pour se débarrasser du foncteur de décalage et après avoir pris les points des complexes solides, donne un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{B}[1/t]\big) \cong \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_k)\widehat{\otimes}^R_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\big)^{N=0},$$

(cf. [**5**, Definition 2.23] pour la définition de $\mathbb{B}$). On utilise ensuite la suite exacte de faisceaux proétales (cf. [**5**, Corollary 2.26])

$$0 \to (\mathbb{B}_{\mathrm{cr}})^{\varphi=1} \to \mathbb{B}[1/t] \xrightarrow{\varphi-1} \mathbb{B}[1/t] \to 0.$$

Soit V une représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$ telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{cr}}(V)=D$, en tensorisant la suite ci-dessus par V on obtient

$$0 \to \mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D) \to \mathbb{B}[1/t]\otimes_{K_0} D \xrightarrow{\varphi-1} \mathbb{B}[1/t]\otimes_{K_0} D \to 0.$$

Ainsi on obtient un triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{B}[1/t]\otimes_{K_0} D\big) \to \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{B}[1/t]\otimes_{K_0} D\big)$$

ce qui permet de conclure qu'on a un quasi-isomorphisme entre les fibres

$$\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{X}_{\mathrm{cr}}(D)\big) \cong \big[\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(X_k\,;\,D\big)\otimes^R_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\big]^{\varphi=1,N=0}.$$

Justifions que ce quasi-isomorphisme est strict. Comme la cohomologie de Hyodo-Kato d'un affinoïde surconvergent est de dimension finie, le terme de droite se représente canoniquement comme une limite inductive d'espaces de Banach. Ceci munit le membre de droite d'une topologie localement convexe séparée canonique et comme le terme de gauche s'exprime suivant la même limite inductive elle est munie de la même topologie canonique : on en déduit que le quasi-isomorphisme est strict. □

La preuve du théorème dans le cas quasi-compact s'en déduit.

6.2.2. *Cas Stein.* — On démontre maintenant le cas Stein. On choisit un recouvrement Stein de X, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que U_n est quasi-compact pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $X=\varinjlim_n U_n$. On a alors

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \text{ et } \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big).$$

Or $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ ce qui permet de conclure sur l'isomorphisme. Il reste à montrer que l'isomorphisme est strict. Les applications naturelles

$$\varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(U_{n,K}\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}^R_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big(U_{n,K}\,;\,\mathcal{E}\big)\widehat{\otimes}_K \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}},$$
$$\varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(U_{n,k}\,;\,D\big)\widehat{\otimes}^R_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \to \varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big(U_{n,k}\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}},$$

sont des quasi-isomorphismes stricts et leurs cohomologies sont classiques. Ensuite, les calculs de $\mathrm{DR}(X_C,\mathcal{E})$ et $\mathrm{HK}(X_C,D)$ dans le cas Stein assurent que $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ est un quasi-isomorphisme strict. Or, on sait que le quasi-isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ est strict par le paragraphe précédent. Finalement, on en déduit que $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ est un complexe dont les groupes de cohomologie sont des Fréchet et que le quasi-isomorphisme avec $\varprojlim_n \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(U_{n,C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ est strict, donc finalement $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(X_C\,;\,\mathbb{V}(1)\big)$ est un quasi-isomorphisme strict.

6.3. Exemples. —

6.3.1. *La droite affine*

On munit la droite affine $X_C = \mathbb{A}^1_C$ de sa structure naturelle d'espace semi-stable que l'on retrouve dans [**15**, Proposition 4.17]. Comme dans [**15**, Proposition 4.17], on calcule la cohomologie proétale isotriviale de la droite affine :

Proposition 6.4. — *Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-oper fortement isotrivial sur $\mathbb{A}^1_K$ de poids (a,b), soient D l'isocristal associé et $\mathcal{E}$ le fibré plat filtré associé. On a une suite exacte $\mathscr{G}_K$-équivariante entre espaces de Fréchet*

$$t^a X^1_{\mathrm{st}}(D[a]) \to \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}(\mathbb{A}^1_C, \mathbb{V}(1)) \to 0.$$

Démonstration. — Premièrement, la cohomologie de de Rham de la droite affine est nulle, i.e. $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1_C) = 0$ et donc la cohomologie de de Rham isotrivial de la droite affine est nulle, i.e. $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(\mathbb{A}^1_C\,;\,\mathcal{E}\big) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^1_C) \otimes_K D_K = 0$. Puis, de l'isomorphisme de Hyodo-Kato on déduit que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathbb{A}^1_k\,;\,\mathcal{E}\big) = 0$. On en déduit que le terme en haut à droite dans le diagramme fondamental est nul donc la cohomologie proétale isotriviale est isomorphe au terme de gauche, d'où le résultat. $\square$

Remarque 6.5. — Le calcul précédent donne le même résultat pour l'espace de Lubin-Tate, muni de son système local universel. Il serait intéressant de comprendre les représentations de $\check{G}$ qui apparaissent alors naturellement dans cette cohomologie isotriviale.

6.3.2. *Le groupe multiplicatif*

De même, pour le groupe multiplicatif on obtient le résultat suivant :

Proposition 6.6. — *Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{Q}_p$-oper fortement isotriviale sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}$ de poids (a,b) et soient D le φ-module associé et $\mathcal{E}$ le fibré plat filtré associé. On a un diagramme commutatif d'espaces de Fréchet $\mathscr{G}_K$-équivariant à lignes exactes*

$$\begin{tikzcd}
t^a X^1_{\mathrm{st}}(D[a]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big(\mathbb{G}_{\mathrm{m},C}\,;\,\mathbb{V}(1)\big) \arrow[r] \arrow[d] & t^a X^+_{\mathrm{cr}}(D[a]) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
D_K \otimes_K \mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & \mathrm{Gr}_b\mathcal{E}(X_K)\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r, "L_\nabla"] & \mathrm{Gr}_a\Omega_{\mathcal{E}}\widehat{\otimes}_K t^a\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & D_K\widehat{\otimes}_K\mathrm{B}_{b+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — On renvoie à [**15**, 4.3.2] pour la construction d'un modèle formel du tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathrm{O}_K}$. Or, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}) \cong c_1^{\mathrm{HK}}(z)K_0$ où on note $c_1^{\mathrm{HK}}(z)$ le symbole de Hyodo-Kato correspondant à la classe de Chern de dz/z. Ce symbole vérifie $\varphi(c_1^{\mathrm{HK}}(z)) = pc_1^{\mathrm{HK}}(z)$ et $N(c_1^{\mathrm{HK}}(z)) = 0$ dont on déduit que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}\,;\,D\big) \cong D \otimes_{K_0} c_1^{\mathrm{HK}}(z)K_0$ et

$$\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathbb{G}_{\mathrm{m},k}\,;\,D\big)\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p} \cong \big(D\widehat{\otimes}_{K_0}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=1} \cong \big(D \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi=1}.$$

La dernière flèche est $\mathscr{G}_K$-équivariante puisque N est trivial sur D. Pour la partie de de Rham on sait que le symbole c_1^{HK} est compatible au symbole c_1^{dR} et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},K}) = c_1^{\mathrm{dR}}(z)K \cong K$, d'où le résultat. $\square$

PARTIE II. COHOMOLOGIE ISOTRIVIALE DE LA TOUR DE DRINFELD

7. Le demi-plan p-adique et sa tour de revêtements

7.1. Le demi-plan p-adique

On rappelle que le *demi-plan p-adique* est l'espace rigide analytique, ouvert admissible de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$, défini par

$$\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p).$$

On note $\Omega_{\mathrm{Dr},C} := \Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$ l'extension des scalaires à C. L'application $\pi\colon \Omega_{\mathrm{Dr},C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_C$ est un plongement ouvert admissible et réalise le demi-plan comme un espace Stein. En effet, notons

$$\Omega_{\mathrm{Dr},n} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \bigcup_{x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} \mathrm{B}(x,n),$$

où $\mathrm{B}(x,n)$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon p^{-n}, i.e. si $\tilde{x} = a_0 + \cdots + a_n p^n$ a pour réduction $x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, les C-points sont $\mathrm{B}(x,n)(C) = \{z \in C \mid v_p(\tilde{x} - z) \geqslant n\}$ et si $\tilde{x}$ a pour réduction $x^{-1} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ alors $\mathrm{B}(x,n)(C) = \{z \in C \mid v_p(\tilde{x}^{-1} - z^{-1}) \geqslant n\}$. On a alors $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} = \varinjlim_n \Omega_{\mathrm{Dr},n}$. Ainsi, les espaces des sections globales $\mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) = \varprojlim_n \mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},n})$ et $\Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ sont des espaces de Fréchet. On note $z \in \mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ la coordonnée naturelle de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$. L'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ est donnée sur z par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \quad g \cdot z = \frac{dz - b}{a - cz}.$$

Cette action se restreint en une action sur $\Omega_{\mathrm{Dr},C}$ et munit $\mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},C})$ d'une action linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soient $k, m \in \mathbb{Z}$ des entiers. On définit le faisceau $\mathcal{O}\{k,m\}$ comme le fibré vectoriel $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant sur $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$, dont les sections globales sont données par $\mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ muni de l'action

$$f \in \mathcal{O}\{k,m\}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}),\ (g \star_k f)(z) = j(z,g)^{-k} \det(g)^m f(g \cdot z),$$

où j est le facteur automorphe donné pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $j(z,g) := a - cz$.

7.2. L'espace de Drinfeld

Soit D l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{Q}_p$, i.e. l'unique corps gauche tel que $\mathrm{inv}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{D} = \frac{1}{2}$. Cette algèbre est munie d'une application norme réduite $\mathrm{nrd}\colon \mathrm{D} \to \mathbb{Q}_p$ et trace réduite $\mathrm{trd}\colon \mathrm{D} \to \mathbb{Q}_p$ telles que trd est une forme linéaire et nrd définit un morphisme de groupes multiplicatifs $\mathrm{nrd}\colon \mathrm{D}^\times \to \mathbb{Q}_p^\times$. De plus, D est munie d'une involution, que l'on note $q \in \mathrm{D} \mapsto \bar{q}$, ce qui permet d'expliciter la norme réduite $\mathrm{nrd}(q) = q \cdot \bar{q}$ et la trace réduite $\mathrm{trd}(q) = q + \bar{q}$. On peut alors expliciter le polynôme caractéristique d'un élément $q \in \mathrm{D}$ par $\chi_q(t) = t^2 - \mathrm{trd}(q)t + \mathrm{nrd}(q) = (t - q) \cdot (t - \bar{q})$.

7.2.1. O_D-*modules formels spéciaux.* — On note $\mathrm{O}_\mathrm{D} \subset \mathrm{D}$ l'ordre maximal, défini par

$$\mathrm{O}_\mathrm{D} := \{q \in \mathrm{D} \mid v_p(\mathrm{nrd}(q)) \geqslant 0\}.$$

De même, l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\mathrm{D} \subset \mathrm{O}_\mathrm{D}$ est défini par l'inégalité stricte $v_p(\mathrm{nrd}(q)) > 0$. On fixe $\varpi_D \in \mathfrak{m}_\mathrm{D}$ tel que $\varpi_D^2 = p$. Si on choisit un plongement $\mathbb{Q}_{p^2} \hookrightarrow \mathrm{D}$, où $\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$ est l'unique extension quadratique non ramifiée, on a $\mathrm{D} = \mathbb{Q}_{p^2}[\varpi_D]$ et $\mathrm{O}_\mathrm{D} = \mathbb{Z}_{p^2}[\varpi_D]$. Soit S un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$. Un O_D-*module p-divisible* sur S est un groupe p-divisible formel $\mathcal{G}$ sur S muni d'une action de O_D, i.e. muni d'un morphisme $\iota\colon \mathrm{O}_\mathrm{D} \to \mathrm{End}_S(\mathcal{G})$. En particulier, $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ est un $\mathbb{Z}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-module et on dit que $\mathcal{G}$ est un O_D-*module formel spécial* si $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ est un $\mathbb{Z}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1. Rappelons le lemme classique suivant (cf. [**41**,]) :

Lemme 7.1. — *Sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, à isogénie près, il existe un unique* O_D*-module formel spécial.*

Ce lemme ce démontre en caractérisant les modules de Dieudonné associés au $\mathrm{O_D}$-module formel spéciaux puis en montrant qu'ils sont tous isogène. On explicite maintenant un de ces modules de Dieudonné. Posons le $\breve{\mathbb{Z}}_p$-module

$$\breve{\mathbf{M}}^+ := \mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\mathbb{Z}}_p, \text{ muni de } \mathbf{V} = \varpi_D \otimes \sigma_p^{-1}.$$

Ces données définissent un groupe p-divisible qui est naturellement un $\mathrm{O_D}$-module formel spécial, que l'on note $\mathbf{G}$. L'isocristal associé est $\breve{\mathbf{M}} = \mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p$, muni du Frobenius relatif $\mathbf{F} = \varpi_D \otimes \sigma_p$. La preuve du lemme 7.1 fait intervenir un opérateur qui s'explicite sur $\breve{\mathbf{M}}$ comme $\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}\varpi_D$ donc $\mathbf{U} = \mathrm{id} \otimes \sigma_p$. Alors, $\breve{\mathbf{M}}$ muni de $\mathbf{U}$ est un isocristal unité et $\breve{\mathbf{M}}^{\mathbf{U}=\mathrm{id}} = \mathrm{D}$. De plus, on a une décomposition de $\breve{\mathbf{M}}$, suivant les deux plongements $\mathbb{Q}_p$-linéaires $\iota_0, \iota_1 \colon \mathbb{Q}_{p^2} \to \breve{\mathbb{Q}}_p$, donnée par

$$\breve{\mathbf{M}} = \breve{\mathbf{M}}_0 \oplus \breve{\mathbf{M}}_1,$$

telle que la restriction de ϖ_D aux composantes induit $\varpi_{D,0} \colon \breve{\mathbf{M}}_0 \to \breve{\mathbf{M}}_1$ et $\varpi_{D,1} \colon \breve{\mathbf{M}}_0 \to \breve{\mathbf{M}}_1$ et $\varpi_D = \varpi_{D,0} + \varpi_{D,1}$. On en déduit une décomposition $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1$ où $\mathbf{U}_0$ stabilise $\breve{\mathbf{M}}_0$ et $\mathbf{U}_1$ stabilise $\breve{\mathbf{M}}_1$. De cette manière, on définit les isocristaux unités $(\breve{\mathbf{M}}_0, \mathbf{U}_0)$ et $(\breve{\mathbf{M}}_1, \mathbf{U}_1)$ dont la somme est l'isocristal $(\breve{\mathbf{M}}, \mathbf{U})$. En particulier, notons que $\breve{\mathbf{M}}_0^{\mathbf{U}_0=\mathrm{id}}$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2 qui munit $\breve{\mathbf{M}}_0$ d'une structure $\mathbb{Q}_p$-rationnelle. On a le lemme suivant :

Lemme 7.2. — *1. On a une bijection naturelle entre les automorphismes* $\mathrm{O_D}$*-invariants de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}, \mathbf{F})$ *et les automorphismes de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}_0, \mathbf{U}_0)$*. En d'autres termes, les automorphismes* $\mathrm{O_D}$*-invariants de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}, \mathbf{F})$ *s'identifient au groupe* $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*.*

2. On a une bijection naturelle entre les filtrations $\mathrm{O_D}$*-invariantes admissibles de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}, \mathbf{F})$ *et les filtrations admissibles de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}_0, \mathbf{U}_0)$*.*

D'après le second point, un calcul de la condition d'admissibilité permet de montrer le corollaire suivant :

Corollaire 7.3. — *On a une bijection naturelle entre filtrations* $\mathrm{O_D}$*-invariantes admissibles de l'isocristal* $(\breve{\mathbf{M}}, \mathbf{F})$ *et les droites de* $\breve{\mathbf{M}}_0$ *qui ne sont pas* $\mathbb{Q}_p$*-rationnelles.*

De manière équivalente, on peut reformuler le corollaire en identifiant les filtrations décrites comme les $\breve{\mathbb{Q}}_p$-droites de $\mathcal{L} \subset \breve{\mathbf{M}}_0$ telles que l'application naturelle $\breve{\mathbf{M}}_0^{\mathbf{U}_0=\mathrm{id}} \to \breve{\mathbf{M}}_0/\mathcal{L}$ soit injective. Ces filtrations correspondent à des $\mathrm{O_D}$-modules formels spéciaux sur $\breve{\mathbb{Z}}_p$ par la théorie de Grothendieck-Messing et en utilisant le réseau précédemment défini dans $\breve{\mathbf{M}}$.

D'autres part, rappelons qu'à isomorphisme près il existe un unique groupe formel de hauteur 2 et de dimension 1 sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ et que, si on le note $\mathbf{H}$, on a en tant que groupe p-divisible $\mathbf{G} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Ceci nous donne directement le lemme suivant :

Lemme 7.4. — *On a*

$$(\breve{\mathbf{M}} \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+)^{\varphi=p} \cong \left(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+\right)^{\varphi^2=p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \left(\mathrm{Sym}^1_{\mathbb{Q}_p}\right)^*.$$

Remarque 7.5. — Dans ce lemme apparait que la décomposition $\mathbf{G} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ est compatible à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur l'isocristal associé. Plus précisément, cette décomposition fournit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur l'isocristal $\breve{\mathbf{M}}$ mais on a aussi muni $\breve{\mathbf{M}}$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à l'aide de l'endomorphisme $\mathbf{U}$ comme au lemme 7.2. Explicitons ceci, qui est aussi contenu dans le lemme 8.1 . Le module de Dieudonné de $\mathbf{H}$ est $\mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^2}} \breve{\mathbb{Z}}_p$ muni du Frobenius $\mathbf{F} = \varpi_{\mathrm{D}} \otimes \sigma_p$. Remarquons que ce Frobenius est bien $\mathbb{Z}_{p^2}$-linéaire et donc est bien défini. Maintenant, le module de Dieudonné de $\mathbf{G}$ s'écrit

$$\mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\mathbb{Z}}_p = \mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^2}} (\mathbb{Z}_{p^2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\mathbb{Z}}_p) \cong \mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^2}} (\breve{\mathbb{Z}}_p \times \breve{\mathbb{Z}}_p) \cong \mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^2}} \breve{\mathbb{Z}}_p \times \mathrm{O_D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^2}} \breve{\mathbb{Z}}_p$$

C'est un isomorphisme de modules de Dieudonné ce qui donne la décomposition $\mathbf{G} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ et montre qu'elle est compatible à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et l'action de $\mathrm{O_D}$ comme annoncé.

De plus, on note $\breve{\mathbf{M}}_k = \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p$ vu comme un isocristal, i.e. muni du Frobenius induit par $\mathbf{F} = \varpi_D \otimes \sigma_p$. Décrivons maintenant les $\mathrm{O_D}$-modules formels spéciaux en termes de théorie de Hodge p-adique qui explicite l'action de D sur la factorisation du corollaire précédent. Pour cela on rappelle [**27**, Théorème 8.1.5] sous la forme d'un lemme :

Lemme 7.6. — *L'espace* $(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi^2=p} \oplus (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi^2=p}$ *est un* D*-espace vectoriel défini par*

$$\varpi_{\mathrm{D}} \cdot (x_0, x_1) = (\varphi(x_0), \varphi(x_1)),$$

et pour $a \in \mathbb{Q}_{p^2} = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi^2=1}$, $a \cdot (x_0,x_1) = (ax_0, ax_1)$. *Soient* $\lambda_0, \lambda_1 \in C$ *linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}_p$. *Le morphisme*

$$\left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\right)^{\varphi^2=p} \oplus \left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\right)^{\varphi^2=p} \to C^2,$$

donné par $(x_0,x_1) \mapsto \left(\lambda_0\theta(x_0) + \lambda_1\theta(x_1), \lambda_0\theta(\varphi(x_0)) + \lambda_1\theta(\varphi(x_1))\right)$ *est surjectif et de noyau* V*, un* D*-sous-espace vectoriel de dimension* 1. *De plus, l'application* $(x_0,x_1) \mapsto (x_0, x_1, \varphi(x_0), \varphi(x_1))$,

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}} \to \left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\right)^2 \oplus \left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\right)^2,$$

est injective et son conoyau est tué par t^2.

7.2.2. *L'espace de Drinfeld.* — Rappelons qu'on note $\breve{\mathbb{Z}}_p \coloneqq \mathrm{W}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, l'anneau des entiers du complété de l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ la catégorie des W-algèbres telles que p est Zariski-localement nilpotente. Soit $\mathbf{G}$ le $\mathrm{O_D}$-module formel spécial sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ définit par $\breve{\mathbf{M}}^+$. Pour R un objet de $\mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$, notons $\bar{R} \coloneqq R/pR$. On définit un foncteur

$$R \longmapsto \left\{ (X,\rho) \mid \begin{array}{c} X \text{ un } \mathrm{O_D}\text{-module formel spécial sur } R \\ \rho\colon \mathbf{G} \otimes_{\bar{\mathbb{F}}_p} \bar{R} \dashrightarrow X \otimes_R \bar{R} \text{ une quasi-isogénie } \mathrm{O_D}\text{-linéaire} \end{array} \right\}.$$

Ce foncteur est représentable par un schéma formel p-adique sur $\breve{\mathbb{Z}}_p$ que l'on note $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$. D'après le lemme 7.2 $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ est muni d'une action naturelle de G. Cette action est donnée pour $g \in G$ sur les R-points par $(X,\rho) \mapsto (X, \rho \circ g)$ On peut décomposer $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ suivant la hauteur de la quasi-isogénie

$$\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}[2n]$$

où les composantes sont isomorphes et définies sur $\breve{\mathbb{Z}}_p$. L'action de G sur les composantes connexes est donnée pour $g \in G$ par $n \mapsto n - v_p(\det(g))$. On a une donnée de descente à $\mathbb{Z}_p$ qui est définie par la multiplication par $p\colon \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}[2n] \to \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}[2n+4]$. Le quotient est noté ${}^p\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}} \coloneqq \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}/p^{\mathbb{Z}}$ qui admet un modèle sur $\mathbb{Z}_p$. On note $\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}}$ la fibre générique de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}[0]$ et $\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr}}$ la fibre générique de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$. On note $\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C} \coloneqq \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}} \otimes C$ et $\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr},C} \coloneqq \breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr}} \otimes C$ leur extension des scalaires à C. Notons que $\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr}} \cong \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}}$ ce qui permet d'exprimer le quotient ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}} \coloneqq \breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr}}/p^{\mathbb{Z}}$ à partir de deux copies de $\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}}$. De plus, ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr}}$ admet un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ que l'on note ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$.

Décrivons le morphisme des périodes. D'après le lemme 7.3, la filtration est entièrement décrite par la filtration induite sur $\breve{\mathbf{M}}_0$. Fixons un isomorphisme $\mathbb{Q}_p^2 \cong \breve{\mathbf{M}}_0^{\mathbf{U}_0=\mathrm{id}}$. Alors, pour $\bar{x} \in \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}(C, \mathrm{O}_C)$ un point géométrique, qui correspond à un couple $(X,\rho) \in \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(\mathrm{O}_C)$, la filtration de Hodge de X et la trivialisation du module de Dieudonné par ρ donnent un morphisme

$$C^2 \cong \mathbb{M}(X)_0 \otimes_{\mathrm{O}_C} C \to \mathrm{Lie}(X)_0 \otimes_{\mathrm{O}_C} C \cong C.$$

Ceci définit le morphisme des périodes $\pi\colon \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C} \to \mathbb{P}^1_C$ qui est un plongement d'image l'ouvert admissible $\Omega_{\mathrm{Dr},C} \subset \mathbb{P}^1_C$. En d'autres termes, le lemme 7.6 fournit une description de l'image de ce morphisme.

7.2.3. *La famille universelle.* — L'espace $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ est muni d'une famille universelle $\mathcal{G}_{\mathrm{Dr}} \to \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ qui est un O_{D}-module formel spécial sur $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$. Le module de Tate de ce groupe p-divisible universel définit sur $\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr}}$ un $\mathbb{Z}_p$-système local étale noté $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr}} \coloneqq \mathbb{T}_p(\mathcal{G}_{\mathrm{Dr}})$ (cf. 3.2). Il définit un $\mathbb{Q}_p$-système local étale, noté $\mathbb{V}_p(\mathcal{G}_{\mathrm{Dr}})$ qui est isotrivial de φ-module associé $\breve{\mathbf{M}}$ et de poids de Hodge-Tate 0 et 1, chacun de multiplicité 2. On note $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}} \coloneqq \mathbb{V}_p(\mathcal{G}_{\mathrm{Dr}})$, dont le φ-module associé est $\breve{\mathbf{M}}$. On définit

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k} \coloneqq \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}, \quad \mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}} \coloneqq \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}.$$

Alors $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}$ est un $\mathbb{Q}_p$-système local isotrivial d'isocristal associé $\breve{\mathbf{D}}_k \coloneqq \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{D}(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p$. On a bien $\breve{\mathbf{D}}_k = \breve{\mathbf{M}}_k(k)$. Pour $k = 1$ notons simplement $\breve{\mathbf{D}} = \breve{\mathbf{D}}_1$.

7.3. La tour de revêtements. —

7.3.1. *Définition.* — Notons que la famille universelle définit un revêtement étale $\mathcal{G}_C[\varpi_{\mathrm{D}}^n] \to \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}$. Ce revêtement est étale puisque toute algèbre de Hopf de rang finie en caractéristique 0 est étale. On définit le n-ième étage de la tour de Drinfeld par

$$\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C} := \mathcal{G}_C[\varpi_{\mathrm{D}}^n] \setminus \mathcal{G}_C[\varpi_{\mathrm{D}}^{n-1}] \to \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}.$$

En terme de problème de modules, on pose $V^+_{\mathrm{Dr}} := \mathrm{O}_{\mathrm{D}}$. L'espace $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ classifie alors les isomorphismes $\mathrm{O}_{\mathrm{D}}^\times$-équivariants entre $V^+_{\mathrm{Dr}}/\varpi_{\mathrm{D}}^n$ et $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr}}/\varpi_{\mathrm{D}}^n$. D'après [**45**], il existe un espace perfectoïde $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ tel que $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \sim \varprojlim_n \mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ et $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ tel que $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \sim \varprojlim_n \breve{\mathrm{M}}^n_{\mathrm{Dr},C}$. Le revêtement $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C} \to \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}$ a pour groupe de Galois $\mathrm{O}_{\mathrm{D}}^\times/1+\varpi_{\mathrm{D}}^n\mathrm{O}_{\mathrm{D}}$ et on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\breve{G}"] & \mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \arrow[d, "\mathrm{O}_{\mathrm{D}}^\times"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\breve{\mathrm{M}}^0_{\mathrm{Dr},C} \arrow[r, "\varpi_{\mathrm{D}}^{\mathbb{Z}}"] & \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1_C
\end{tikzcd}$$

Le $\mathbb{Q}_p$-système local étale isotrivial $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}$ se définit sur $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ de la même manière que précédemment. Sur $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ le système local $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}$ devient trivial et donc $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}$ devient trivial aussi.

On a défini ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ et de même, le quotient du n-ième étage de la tour par $p^{\mathbb{Z}}$ admet un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ que l'on note ${}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$. Pour simplifier les notations, on note $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}} := \mathcal{O}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ qui est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de $G \times \breve{G}$ telle que les deux centres agissent identiquement. De même que pour le demi-plan, on définit pour $k \geqslant 0$ un entier et $m \in \mathbb{Z}$ la représentation $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{k,m\}$, qui en tant que $\mathbb{Q}_p[\breve{G}]$-module est $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$, mais où l'action de G est donnée pour $f \in \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$ par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \quad (g \star_{k,m} f)(z) = j(z,g)^{-k} \det(g)^m f(g \cdot z),$$

où on rappelle que $\pi\colon {}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p} \to \Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ est la projection naturelle et $j(z,g) = (a - c\pi(z)) \in \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}$ est le facteur d'automorphie. L'action considérée a un sens puisque $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$ est naturellement un $\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}$-module.

7.3.2. *Composantes connexes.* — Décrivons les composantes connexes de $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$. Rappelons (cf. [**48**, Theorem 4.4]) qu'on a une application $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \to \mathbb{Z}_p^\times$, donnant les composantes connexes de la tour, qui est construite à partir des projections $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C} \to \pi_0(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})$ et du choix d'un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$, donnant une application

$$\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \to \mathrm{Isom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p(1)) \cong \mathbb{Z}_p^\times.$$

Ainsi, on en déduit un isomorphisme $\pi_0(\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}) \cong \mathbb{Q}_p^\times$. L'action de $\breve{G}$ sur $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ induit sur $\mathbb{Q}_p^\times$ l'action de la norme réduite et l'action de G induit sur $\mathbb{Q}_p^\times$ l'action de l'inverse du déterminant. De plus, l'action de $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ est donnée par le corps de classe : $\mathrm{rec}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{W}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Q}_p^\times$; on rappelle que l'on a normalisé rec pour que l'image du Frobenius arithmétique soit p. Posons $\mathbb{G} := G \times \breve{G} \times \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$. Comme dans l'introduction on a un morphisme $\nu\colon \mathbb{G} \to \mathbb{Q}_p^\times$, donné par

$$(g, \breve{g}, \sigma) \longmapsto \det(g)^{-1} \otimes \mathrm{nrd}(\breve{g}) \otimes \mathrm{rec}(\sigma).$$

Alors, $\mathbb{G}$ opère sur $\breve{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ et l'action sur les composantes connexes est donnée par ν. De plus, on introduit les groupes

$$\mathbb{G}^+ := \nu^{-1}(\mathbb{Z}_p), \quad \mathbb{G}^\circ := \ker \nu.$$

Alors $\mathbb{G}^+$ stabilise $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ et $\mathbb{G}^\circ$ stabilise les composantes connexes. On notera $\dot{\mathrm{M}}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ l'une des composantes connexes que l'on choisit une bonne fois pour toute.

Le lemme suivant résume ces observations, déduit de [**48**, Theorem 4.4] :

Lemme 7.7. — *Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. En tant que représentation de $\mathbb{G}$,*

$$\mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}^+}^{\mathbb{G}} \mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big),$$

où l'induction est continue. De plus,

$$\mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big) = \bigoplus_{\chi\colon \mathbb{Z}_p^{\times}\to L} (\chi\circ\nu)$$

où la somme directe porte sur tous les caractères lisses de $\mathbb{Z}_p^{\times}$ à valeurs dans L.

Notons que comme $\mathbb{G}/\mathbb{G}^+ \cong p^{\mathbb{Z}}$ via ν, l'induction $\mathrm{Ind}_{\mathbb{G}^+}^{\mathbb{G}} \mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big)$ s'identifie aux fonctions sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big)$. Ce lemme nous permet de décomposer les groupes de cohomologie étale suivant les caractères qui apparaissent dans le $\mathrm{H}^0_{\text{ét}} \coloneqq \mathrm{H}^0_{\text{ét}}\big(\breve{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\,L(1)\big)$, comme on le fera à la proposition 9.3.

8. Représentations de G et $\check{G}$

Rappelons qu'on note $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\check{G} = \mathrm{D}^\times$. De même, on note $G^+ = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $\check{G}^+ = \mathrm{O}_{\mathrm{D}}^\times$. Dans cette partie, on résume quelques propriétés des représentations de G et $\check{G}$ que l'on utilise dans la suite.

8.1. Représentations algébriques. — Rappelons que pour H un groupe p-adique et V une L-représentation de H, un vecteur $v \in V$ est dit *algébrique* si l'application orbitale $h \mapsto h \cdot v$ est une fonction algébrique sur H. Rappelons que si $H = G$ alors $\phi\colon G \to L$ est *algébrique* si pour tout élément $g \in G$, $\phi(g)$ est un polynôme en les coefficients de g et $\det(g)^{-1}$; la définition est similaire pour $\check{G}$. Si tous les éléments de V sont algébriques alors on dit que la représentation est une *représentation algébrique*. Si, comme dans les cas qui nous intéressent, H est l'ensemble des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique, les représentations algébriques proviennent directement des représentations algébriques du groupe algébrique. Dans ce qui suit, on va préciser ce fait.

8.1.1. *Représentations algébriques irréductibles de G.* — Pour $k \geqslant 1$ un entier, $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on notera simplement $\mathrm{Sym}_K^k := \mathrm{Sym}_K^k K^2$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. On définit une $\mathbb{Q}_p$-représentation de G

$$W_{a,b}^* := \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}^{b-a-1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det{}^a.$$

C'est une $\mathbb{Q}_p$-représentation irréductible et algébrique de G et toute représentation algébrique irréductible de G est de cette forme. De plus, toute représentation algébrique de G de dimension finie se décompose en somme directe de représentations algébriques irréductibles. Rappelons que $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}^1 = \mathbb{Q}_p e_0^* \oplus \mathbb{Q}_p e_1^*$ et pour $g \in G$ on a

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ g \cdot e_0^* = a e_0^* + c e_1^*, \ g \cdot e_1^* = b e_0^* + d e_1^*.$$

De plus, la représentation det peut se définir comme $\bigwedge^2 \mathrm{Sym}^1 = \mathbb{Q}_p e_0^* \wedge \mathbb{Q}_p e_1^*$. Ainsi, une base de $W_{a,b}^*$ est donnée par $\{(e_0^*)^i (e_1^*)^j (e_0^* \wedge e_1^*)^{-a}\}_{i+j=b-a-1}$. On note $W_{a,b}$ le dual de $W_{a,b}^*$ qui a pour base $\{(e_0)^i (e_1)^{k-i} (e_0 \wedge e_1)^{-a}\}_{0 \leqslant i \leqslant k}$ et qui est construit à partir de $\left(\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}^1\right)^* = \mathbb{Q}_p e_0 \oplus \mathbb{Q}_p e_1$. Pour $g \in G$ on a

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ g \cdot e_0 = \frac{1}{\det(g)}(d e_0 - b e_1), \ g \cdot e_1 = \frac{1}{\det(g)}(-c e_0 + a e_1), \ g \cdot (e_0 \wedge e_1) = \frac{1}{\det(g)}(e_0 \wedge e_1).$$

On remarque que $W_{a,b}^* \cong W_{1-b,1-a}$ et en particulier $W_{2,0}^* \cong W_{1,-1}$. Si $L/\mathbb{Q}_p$ est une extension alors on définit $W_{a,b}^*(L) := W_{a,b}^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ et son dual $W_{a,b}(L)$. De plus, si $L/\mathbb{Q}_p$ est une extension assez grande, i.e. contenant une racine de p, alors on pose $\underline{W}_{a,b}^* := W_{a,b}^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} |\det|_p^{\frac{a+b-1}{2}}$ et $\underline{W}_{a,b} := W_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \otimes_L |\det|_p^{\frac{1-a-b}{2}}$ où la norme $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times$ est la norme p-adique. Ceci définit des L-représentations unitaires localement algébriques de G.

8.1.2. *Représentations algébriques irréductibles de $\check{G}$.* — Pour $\check{G}$ la situation est un peu différente puisqu'il n'existe pas de $\mathbb{Q}_p$-représentation fidèle irréductible de dimension 2. On a D, muni de la translation de $\check{G}$, qui définit une $\mathbb{Q}_p$-représentation algébrique de $\check{G}$ de dimension 4 mais malheureusement, comme on le verra plus bas, $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}^k \mathrm{D}$ n'est pas irréductible. On a un isomorphisme

$$\mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^2} \cong M_2(\mathbb{Q}_{p^2}),$$

ce qui fournit un plongement $\check{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^2})$. Remarquons que sous cet isomorphisme la norme réduite s'identifie au déterminant. Les $\mathbb{Q}_{p^2}$-représentations algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^2})$ sont les $W_{a,b}^*(\mathbb{Q}_{p^2})$ pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$. En composant avec les inclusions, on définit la $\mathbb{Q}_{p^2}$-représentation algébrique irréductible de $\check{G}$ par

$$\check{W}_{a,b} := \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_{p^2}}^{b-a-1} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \mathrm{nrd}^a,$$

et on note son dual $\check{W}^*_{a,b}$. On a toujours $\check{W}^*_{a,b} \cong \check{W}_{1-b,1-a}$. Remarquons que, dans ce qui précède, on peut remplacer $\mathbb{Q}_{p^2}$ par une extension quadratique ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, puisqu'une telle extension scinde aussi D. De plus, comme précédemment, pour toute extension $L/\mathbb{Q}_p$ assez grande, i.e. contenant une racine de p et contenant $\mathbb{Q}_{p^2}$ (par commodité), on définit $\check{W}_{a,b}(L) = \check{W}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L$ et $\underline{\check{W}}_{a,b} = \check{W}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L \otimes_L |\mathrm{nrd}|_p^{\frac{1-a-b}{2}}$ mais aussi leurs duaux $\underline{\check{W}}_{a,b}$ et $\underline{\check{W}}^*_{a,b}$. Ce sont des L-représentations unitaires localement algébriques de $\check{G}$.

8.1.3. *Décomposition de l'isocristal.* — Fixons un plongement $\mathbb{Q}_{p^2} \hookrightarrow \mathrm{D}$. Pour $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie contenant $\mathbb{Q}_{p^2}$, l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, on définit

$$\mathbf{D}_{k,L} \coloneqq \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cong \mathrm{Sym}^k_L(\mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L),$$

et simplement $\mathbf{D}_L \coloneqq \mathbf{D}_{1,L}$. Alors, $\mathbf{D}_{k,L}$ est une L-représentation algébrique de $G \times \check{G}$. Commençons par décrire cette représentation dans le cas $k = 1$, le cas général étant fait plus tard, à l'aide de foncteurs de Schur.

Lemme 8.1. — *Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie contenant une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$. En tant que L-représentation de $G \times \check{G}$ on a*

$$\mathbf{D}_L \cong W_{0,2}(L) \otimes_L \check{W}_{0,2}(L).$$

Démonstration. — Fixons une présentation $\mathrm{D} = \mathbb{Q}_p\langle \alpha, \varpi_{\mathrm{D}}\rangle$ telle que $\varpi_{\mathrm{D}}^2 = \varpi$ et telle que $\alpha^2 = a \in \mathbb{Z}_p$ n'est pas un carré modulo p et telle que $\varpi_{\mathrm{D}}\alpha = -\alpha\varpi_{\mathrm{D}}$. D'après le lemme 7.4, on sait que $\check{\mathbf{D}}_0^{\mathbf{U}_0=1} \cong W_{0,2}$ et $\check{\mathbf{D}}_1^{\mathbf{U}_1=1} \cong W_{0,2}$ en tant que représentation de G. Ainsi, l'action de $\check{G}$ est définie par les actions de ϖ_{D} et α. Or, l'action de ϖ_{D} définit un isomorphisme entre $\check{\mathbf{D}}_0^{\mathbf{U}_0=1}$ et $\check{\mathbf{D}}_1^{\mathbf{U}_1=1}$. Soit $\{e_0, e_1\}$ est une $\mathbb{Q}_p$-base de $\check{\mathbf{D}}_0^{\mathbf{U}_0=1}$. Alors $\{\varpi_{\mathrm{D}}e_0, \varpi_{\mathrm{D}}e_1\}$ définit une $\mathbb{Q}_p$-base de $\check{\mathbf{D}}_1^{\mathbf{U}_1=1}$. Par définition, il existe $\alpha_L \in L$ tel que $\alpha_L^2 = a$. On peut alors choisir une décomposition

$$\mathbf{D}_L = \mathbf{D}_{L,+} \oplus \mathbf{D}_{L,-},$$

telle que α agit par α_L sur $\mathbf{D}_{L,+}$ et par $-\alpha_L$ sur $\mathbf{D}_{L,-}$. Par définition, quitte a changer α_L par son conjugué, on a $\mathbf{D}_{L,+} = \check{\mathbf{D}}_0^{\mathbf{U}_0=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ et $\mathbf{D}_{L,-} = \check{\mathbf{D}}_1^{\mathbf{U}_1=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$. Ainsi, $\{e_0, e_1\}$ définit une $\mathbb{Q}_p$-base de $\mathbf{D}_{L,+}$ et $\{\varpi_{\mathrm{D}}e_0, \varpi_{\mathrm{D}}e_1\}$ définit une $\mathbb{Q}_p$-base de $\mathbf{D}_{L,-}$. Posons $\check{V}_0 \coloneqq \mathrm{Vect}_L\{e_0, \varpi_{\mathrm{D}}e_0\}$ et montrons qu'en tant que représentation de $\check{G}$ on a $\check{V}_0 \cong \check{W}_{0,2}(L)$. En effet, $\check{V}_0$ est un L-espace vectoriel de dimension 2, stable par $\check{G}$ et l'action est définie par $\check{G} \to \mathrm{GL}(\check{V}_0) \cong \mathrm{GL}_2(L)$ telle que

$$\varpi_{\mathrm{D}} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_L & 0 \\ 0 & -\alpha_L \end{pmatrix}.$$

Mais c'est exactement $\check{W}_{0,2}(L)$, et de même on peut montrer que $\check{V}_1 \coloneqq \mathrm{Vect}_L\{e_1, \varpi_{\mathrm{D}}e_1\} \cong \check{W}_{0,2}(L)$. Finalement on a bien montré

$$\mathbf{D}_L \cong W_{0,2}(L) \otimes_L \check{W}_{0,2}(L).$$

□

Remarque 8.2. — Donnons une explication plus conceptuelle du lemme 8.1. Premièrement, via l'isomorphisme $\mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cong \mathrm{M}_2(L)$ on obtient deux actions (l'une à gauche et l'autre à droite) de $\mathrm{GL}_2(L)$ qui commutent. Ces actions se restreignent en une représentation de $G \times \check{G}$ via le plongement de ces groupes dans $\mathrm{GL}_2(L)$. Maintenant, si V est un L-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{End}_L(V) \cong V \otimes V^*$ et l'action de $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V)$ est à gauche sur le premier facteur V et à droite sur le second facteur V^*. En ce sens, l'isomorphisme $\mathrm{End}_L(V) \cong V \otimes V^*$ est $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V)$-équivariant. Ceci nous donne le lemme 8.1 en prenant $V = L^2$.

On veut maintenant décomposer $\mathrm{Sym}^k_L(\mathrm{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)$. Commençons par quelques rappels sur les foncteurs de Schur. Soit K un corps de caractéristique 0, pour tout entier $k \geqslant 0$ et toute partition $\lambda \dashv k$ on a un *foncteur de Schur* $\mathbb{S}_\lambda \colon \mathrm{Vect}_K \to \mathrm{Vect}_K$ qui permet de construire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ et les représentations du groupe général linéaire. Les partitions de k sont représentés par des diagrammes de Young. Pour plus de détails sur ces constructions et le résultat qui va suivre, on renvoie à [**31**, Lecture 6]. Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Alors d'après [**31**, Exercice 6.11] on a

$$\mathrm{Sym}_K^k(V \otimes_K W) = \bigoplus_{\lambda \dashv k} \mathbb{S}_\lambda V \otimes_K \mathbb{S}_\lambda W,$$

où la somme porte sur l'ensemble des tableaux de Young λ tels que le nombre de lignes de λ est inférieur à $\dim_K V$ et à $\dim_K W$, i.e. on considère les partitions en au plus $\min\{\dim_K V, \dim_K W\}$ entiers. De plus, pour V un K-espace vectoriel de dimension 2 et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ on a

$$\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} V \otimes_K \det^{\lambda_2}.$$

Combiné au lemme 8.1 on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 8.3. — *On a la décomposition suivante, en tant que représentation de $G \times \check{G}$:*

$$\mathbf{D}_{k,L} \cong \bigoplus_{\substack{a+b=k+1 \\ 0 \leqslant a < b}} W_{a,b}(L) \otimes_L \check{W}_{a,b}(L).$$

8.1.4. *Représentations localement algébriques.* — Rappelons que pour H un groupe p-adique et V une L-représentation de H, un vecteur $v \in V$ est dit *localement algébrique* si l'application orbitale $h \mapsto h \cdot v$ est une fonction localement algébrique sur H. On note alors $V^{\mathrm{lalg}} \subset V$ le sous-espace des vecteurs localement algébriques, qui est une sous-représentation de V. De plus, V est *localement algébrique* si $V^{\mathrm{lalg}} = V$. Si V est une L-représentation irréductible, localement algébrique de H, alors elle est de la forme

$$V \cong V^\infty \otimes_L V^{\mathrm{alg}},$$

où V^∞ est une L-représentation lisse et V^{alg} une L-représentation algébrique de H.

Rappelons qu'on note $\check{G}^+ := \mathrm{O}_\mathrm{D}^\times$ et $\check{G}^1 := \ker(\mathrm{nrd})$.

Lemme 8.4. — *Soit $H \subset \check{G}^1$ un sous-groupe ouvert compact. Soit V une L-représentation algébrique de H de dimension finie, alors*

$$\mathrm{H}^1\big(H\,;\,V\big) = 0.$$

Démonstration. — Premièrement, remarquons que l'algèbre de Lie de H est la même que celle de $\check{G}^1$, qui est $\mathrm{D}^1 \subset \mathrm{D}$, la sous-algèbre de Lie des éléments dont la trace réduite est nulle. De plus, H est un groupe de Lie p-adique et V est a fortiori une représentation localement analytique. Ainsi, d'après un théorème de Lazard, [**39**, Théorème 2.4.9], la cohomologie de groupe est calculée par la cohomologie de l'algèbre de Lie, plus précisément

$$\mathrm{H}^1\big(H\,;\,V\big) \cong \mathrm{H}^1\big(\mathrm{D}^1\,;\,V\big),$$

donc il suffit de montrer que $\mathrm{H}^1\big(\mathrm{D}^1\,;\,V\big) = 0$. Or D^1 est une algèbre de Lie semi-simple et V est une représentation de D^1 de dimension finie. On utilise maintenant le théorème de Whitehead (cf. [**36**, III. Theorem 13]) pour conclure que $\mathrm{H}^1\big(\mathrm{D}^1\,;\,V\big) = 0$. □

Proposition 8.5. — *Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ deux entiers. Alors*

$$\mathrm{H}^1\big(1 + p^n \mathrm{O}_\mathrm{D}\,;\,\mathrm{Ind}_{\check{G}^1}^{\check{G}^+} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}\big)$$

est un $\mathbb{Z}_p$-module de torsion p-primaire et de type fini. En particulier, il est tué par une puissance de p.

Démonstration. — Notons dans la suite $\check{G}(n) := 1 + p^n \mathrm{O}_\mathrm{D}$ et $\check{G}^1(n) := \check{G}(n) \cap \check{G}^1$. On commence par deux observations :

- On a $\mathrm{Ind}_{\check{G}^1}^{\check{G}^+} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D} \cong \mathscr{C}^0\big(\mathbb{Z}_p^\times\,,\,\mathbb{Z}_p\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}$ puisque $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini. De même, $\mathrm{Ind}_{\check{G}^1(n)}^{\check{G}(n)} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D} \cong \mathscr{C}^0\big(1 + p^n \mathbb{Z}_p\,,\,\mathbb{Z}_p\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}$.
- Par le lemme de Shapiro,

$$\mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathrm{Ind}_{\check{G}^1(n)}^{\check{G}(n)} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}\big) \cong \mathrm{H}^1\big(\check{G}^1(n)\,;\,\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^k \mathrm{O}_\mathrm{D}\big).$$

Or, par le lemme 8.4, $\mathrm{H}^1\big(\check{G}^1(n)\,;\,\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D}\big)$ est de torsion p-primaire et de type fini et donc $\mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathrm{Ind}^{\check{G}(n)}_{\check{G}^1(n)}\,\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D}\big)$ est de torsion p-primaire et de type fini. Or,

$$\mathrm{Ind}^{\check{G}^+}_{\check{G}^1}\,\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D} \cong \bigoplus_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \mathscr{C}^0\big(a+p^n\mathbb{Z}_p\,,\,\mathbb{Z}_p\big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D} \cong \bigoplus_{a\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}\mathrm{Ind}^{\check{G}(n)}_{\check{G}^1(n)}\,\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D}$$

en tant que représentation de $\check{G}(n)$. Ainsi $\mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathrm{Ind}^{\check{G}^+}_{\check{G}^1}\,\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\,\mathrm{O_D}\big)$ est de torsion p-primaire et de type fini. $\square$

8.1.5. *Représentation de Steinberg.* — Soit W une L-représentation de G algébrique irréductible, donc de dimension finie. On note $\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ dans W, muni de l'action induite de G. De plus,

- $\mathscr{C}^0\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)$ désigne les fonctions continues,
- $\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)$ désigne les fonctions localement constantes,
- $\mathscr{C}^{\mathrm{lan}}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)$ désigne les fonctions localement analytiques.

Notons que ces représentations sont des induites à G de W vue comme représentation de B, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Les fonctions constantes donnent une sous-représentation $W\hookrightarrow\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)$ qui définit une sous-représentation des trois représentations de G ci-dessus, puisqu'elle est engendrée par $\mathbf{1}\colon\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\mapsto 1\in L$. De plus, $\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)\cong\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,L\big)\otimes_L W$. On note le quotient $\mathrm{St}_L:=\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,L\big)/L\cdot\mathbf{1}$ et on a dans ce cas $\mathscr{C}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)\cong\mathrm{St}_L\otimes_L W$. Ainsi, on récapitule

- $\mathrm{St}^0_L:=\mathscr{C}^0\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,L\big)/L\cdot\mathbf{1}$ définit la *Steinberg continue* et
$$\mathrm{St}^0_L\otimes W\cong\mathscr{C}^0\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)/(W\otimes\mathbf{1}).$$
- $\mathrm{St}^\infty_L:=\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,L\big)/L\cdot\mathbf{1}$ définit la *Steinberg lisse* et
$$\mathrm{St}^\infty_L\otimes W\cong\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)/(W\otimes\mathbf{1}).$$
  C'est un espace de type compact, son dual $(\mathrm{St}^\infty_L\otimes W)'$ est un espace de Fréchet mais aussi une représentation irréductible et admissible de G.
- $\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_L:=\mathscr{C}^{\mathrm{lan}}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,L\big)/L\cdot\mathbf{1}$ définit la *Steinberg localement analytique* et
$$\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_L\otimes W\cong\mathscr{C}^{\mathrm{lan}}\big(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\,;\,W\big)/(W\otimes\mathbf{1}).$$
  C'est un espace de type compact et donc son dual $(\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_L\otimes W)'$ est un espace de Fréchet. Elle n'est pas irréductible puisqu'elle contient $\mathrm{St}^\infty_L\otimes W$.

8.1.6. *La série speciale localement analytique.* — Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$ notons x^i le caractère algébrique $\mathbb{Q}_p\to L$. On note

$$B_{a,b}:=\mathrm{Ind}^G_B(x^a\otimes x^{b-1}),\ B_{b,a}:=\mathrm{Ind}^G_B(x^{b-1}\otimes x^a).$$

Rappelons que $B_{b,a}$ est topologiquement irréductible et $W^*_{a,b}(L)\subset B_{a,b}$, qui n'est donc pas irréductible. On définit de plus

$$\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_{a,b}:=B_{a,b}/W^*_{a,b}(L).$$

C'est une Steinberg localement analytique tordue. Soit $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}:=\mathrm{St}^\infty_L\otimes_L W^*_{a,b}(L)$ pour alléger les notations. On note $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}$ le groupe des extensions dans la catégorie des L-représentations localement analytiques de caractère central fixé. D'après [**11**, Proposition 2.6] et [**11**, Théorème 2.7] on obtient le lemme suivant :

Lemme 8.6. —

1. *L'action par dérivation, donnée par l'élément* $u^+:=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}$ *de l'algèbre de Lie, induit une suite exacte*
$$0\to\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\to\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\xrightarrow{(u^+)^{b-a}}B_{b,a}\to 0.$$

En particulier, $\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}$ *a deux composantes de Jordan-Hölder.*

2. *On a un isomorphisme naturel* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W_{a,b}^*(L)\,,\,\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)$.

Le membre de gauche de cet isomorphisme est de dimension 2 sur L, engendré par la valuation p-adique v_p et le logarithme log normalisé par $\log(p) = 0$. La base $(v_p, \log)$ donne une identification $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, L)) \cong \mathbb{P}^1(L)$ ce qui permet de définir pour $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L)$ une représentation localement analytique que l'on note $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ et qui est par définition contenue dans une suite exacte de L-représentations de G non scindées

$$0 \to \mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}} \to \Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]} \to W_{a,b}^*(L) \to 0.$$

En particulier, $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ a trois composantes de Jordan-Hölder. Rappelons de plus que $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ est la représentation localement analytique construite par Breuil dans [**7**] où il démontre les résultats suivants :

Lemme 8.7. — *On a*

- $\mathrm{End}_L\big(\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big) = L$,
- *si* $(a, b, \mathcal{L}) \neq (a', b', \mathcal{L}')$ *alors* $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]} \ncong \Sigma_{\mathcal{L}'}^{[a',b']}$,
- *les vecteurs localement algébriques de* $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ *sont* $\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}$.

On aura besoin des versions unitaires de ces représentations. Pour Π l'une des représentations de ce paragraphe, i.e. $\Pi = B_{a,b}, B_{b,a}, \mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}, \mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}, \Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$, on note $\underline{\Pi} := \Pi \otimes |\det|_p^{\frac{a+b-1}{2}}$, comme on a fait pour les représentations algébriques $\underline{W}_{a,b}$.

8.1.7. *Dualité de Morita.* — La dualité de Morita donne un isomorphisme explicite entre les formes différentielles sur le demi-plan p-adique et les distributions localement analytiques sur l'espace projectif. Plus précisément, on a un isomorphisme topologique G-équivariant $\big(\mathrm{St}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{lan}}\big)' \cong \Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$, donné explicitement par *le noyau de Poisson*

$$\mu \in \big(\mathrm{St}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{lan}}\big)' \longmapsto \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{dz}{z-x}\mu(x),$$

où l'intégrale à droite signifie l'accouplement entre la distribution μ et la fonction $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \mapsto \frac{dz}{z-x} \in \Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ à valeurs dans les différentielles sur $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$. Breuil a étendu cette dualité à la série spéciale p-adique (cf. [**7**, Théorème 3.2.3]. On aura besoin d'une version tordue de la dualité de Morita, qui apparait chez Breuil (cf. [**7**, Théorème 3.1.2]) mais aussi chez Dasgupta-Teitelbaum (cf. [**19**, Theorem 2.2.1]). Nous énonçons le théorème en utilisant le noyau de Poisson, pour lequel on renvoit à [**19**, Proposition 2.2.6].

Proposition 8.8. — *Soient* $a, b \in \mathbb{N}$ *tels que* $0 \leqslant a < b$. *Alors on a un isomorphisme topologique* G*-équivariant* $\big(\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)' \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^0\{a-b+1, 1-a\}$ *donné par le noyau de Poisson*

$$\mu \in \big(\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)' \longmapsto \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{dz}{z-x}\mu(x),$$

8.1.8. *Vecteurs localement analytiques.* — Commençons a motiver ce que l'on va faire, quitte à sortir légèrement du cadre de ce paragraphe. On introduit la L-représentation $\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ de G en 12.1. Les vecteurs localement analytiques de $\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ ne sont pas exactement $\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$; ils ont une composante de Jordan-Hölder supplémentaire dont on va montrer ici qu'elle n'interviendra pas dans nos futurs calculs. Plus précisément, la L-representation localement analytique ${}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ de G a 4 composantes de Jordan-Hölder et on a une suite exacte non scindée

$$0 \to \underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]} \to {}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]} \to \underline{\widetilde{B}}_{b,a} \to 0,$$

où $\widetilde{B}_{b,a} := \mathrm{Ind}_B^G(\chi x^{b-1} \otimes \chi^{-1} x^a)$, avec $\chi(x) = x|x|$, est une L-représentation localement analytique de G et $\underline{\widetilde{B}}_{b,a}$ est son unitarisé. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 8.9. — *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$. Alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}(\underline{W}^*_{a,b}\,,\,\underline{\widetilde{B}}_{b,a}) = 0.$$

Avant de démontrer ce lemme on a besoin d'un peu de préparation.

Lemme 8.10. — *Soit $\delta\colon T \to L$ un caractère localement analytique mais non algébrique (en particulier non trivial), que l'on voit comme un caractère de B. Alors*

$$\mathrm{H}^i\big(B\,;\,\delta\big) = 0.$$

La cohomologie est ici la cohomologie localement analytique de groupe.

Démonstration. — On commence par justifier qu'il suffit de montrer que pour tout caractère localement analytique non trivial $\delta\colon T \to L$, on a $\mathrm{H}^i\big(T\,;\,\delta\big) = 0$. En effet, la suite spectrale d'Hochschild-Serre s'écrit

$$E_2^{i,j}\colon \mathrm{H}^i\big(T\,;\,\mathrm{H}^j(N\,;\,\delta)\big) \implies \mathrm{H}^{i+j}\big(B\,;\,\delta\big)$$

et en tant que représentation de T, on a $\mathrm{H}^j\big(N\,;\,\delta\big) = \mathrm{H}^j\big(N\,;\,\mathbb{Q}_p\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \delta$. Mais, en tant que représentation de T, $\mathrm{H}^j\big(N\,;\,\mathbb{Q}_p\big)$ est un caractère algébrique donc $\mathrm{H}^j\big(N\,;\,\delta\big)$ est un caractère non algébrique par l'hypothèse. Ainsi, il suffit de montrer que l'on a $\mathrm{H}^i\big(T\,;\,\delta\big) = 0$ pour tout entier $i \geqslant 0$ comme annoncé.

Par la formule de Künneth, en écrivant $\delta = \delta_1 \otimes \delta_2$ on obtient

$$\mathrm{H}^i\big(T\,;\,\delta\big) = \bigoplus_{k_1+k_2=i} \mathrm{H}^{k_1}\big(\mathbb{Q}_p^\times\,;\,\delta_1\big) \otimes_L \mathrm{H}^{k_2}\big(\mathbb{Q}_p^\times\,;\,\delta_2\big)$$

et on se ramène donc à montrer que pour tout caractère unitaire $\delta_0\colon \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ et pour tout entier $i \geqslant 0$ on a

$$\mathrm{H}^i\big(\mathbb{Q}_p^\times\,;\,\delta_0\big) = 0.$$

Pour démontrer ce résultat, on décompose $\mathbb{Q}_p^\times = p^{\mathbb{Z}} \cdot \mu_{p-1} \cdot (1 + p\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z} \times \mu_{p-1} \times \mathbb{Z}_p$ et la décomposition de Künneth donne

$$\mathrm{H}^i\big(\mathbb{Q}_p^\times\,;\,\delta_0\big) \cong \bigoplus_{k_1+k_2+k_3=i} \mathrm{H}^{k_1}\big(\mathbb{Z}\,;\,\delta_0\big) \otimes_L \mathrm{H}^{k_2}\big(\mu_{p-1}\,;\,\delta_0\big) \otimes_L \mathrm{H}^{k_3}\big(\mathbb{Z}_p\,;\,\delta_0\big).$$

On analyse les termes un par un pour justifier que dans chaque terme au moins l'un des groupes de cohomologie est nul.

- On a $\mathrm{H}^{k_1}\big(\mathbb{Z}\,;\,\delta_0\big) = 0$ pour $k_1 \geqslant 2$ ou pour tout entier $k_1 \geqslant 0$ tel que $\delta_0(p) \neq 1$.
- On a $\mathrm{H}^{k_2}\big(\mu_{p-1}\,;\,\delta_0\big) = 0$ pour $k_2 \geqslant 1$ puisque les représentations de groupes finis en caractéristiques zéros sont semi-simples, puis $\mathrm{H}^0\big(\mu_{p-1}\,;\,\delta_0\big) = 0$ si $\delta_0\big|_{\mu_{p-1}} \neq 1$.
- On a $\mathrm{H}^{k_3}\big(\mathbb{Z}_p\,;\,\delta_0\big) = 0$ pour $k_3 \geqslant 2$, ou pour tout entier $k_3 \geqslant 0$ tel que $\delta_0\big|_{(1+p\mathbb{Z}_p)} \neq 1$.

Puisque $\delta_0 \neq 1$, l'une des restrictions considérées n'est pas triviale, donc l'un des trois groupes de cohomologie est toujours nul ce qui permet de conclure que $\mathrm{H}^i\big(\mathbb{Q}_p^\times\,;\,\delta_0\big) = 0$ pour tout entier $i \geqslant 0$. □

On peut maintenant passer à la démonstration du lemme 8.9.

Démonstration. — Rappelons qu'on note $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Alors, d'après le Lemme de Shapiro on a

$$\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}(\underline{W}^*_{a,b}\,,\,\underline{\widetilde{B}}_{b,a}) \cong \mathrm{H}^1\big(B\,;\,W_{a,b}(L) \otimes_L (\chi x^{b-1} \otimes \chi^{-1} x^a)\big),$$

où la cohomologie à droite est la cohomologie localement analytique de groupes. Or, en tant que représentation de B, Sym^{b-a-1} est une extension successive de caractères algébriques et donc $W_{a,b}(L) \otimes_L (\chi x^{b-1} \otimes \chi^{-1} x^a)$ est une extension successive de caractères localement algébriques dont la partie lisse n'est pas triviale. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout entier $i \geqslant 0$ et pour tout caractère localement algébrique non trivial $\delta\colon \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ on a

$$\mathrm{H}^i\big(B\,;\,\delta\big) = 0.$$

Or, c'est le contenu du lemme 8.10, ce qui conclut la preuve du lemme. □

9. Calculs de cohomologie

9.1. Décomposition du système local. — Le but de ce paragraphe est de décomposer le système local suivant les différents poids. On commence par observer que le corollaire 8.3 donne une décomposition du fibré $\mathcal{E}_{\mathrm{Dr},k}$,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Dr},k} = \bigoplus_{\substack{a+b=k+1 \\ 0\leqslant a<b}} \mathcal{E}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \check{W}_{a,b},$$

muni de sa filtration de Hodge induite sur les $\mathcal{E}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$. On a une décomposition similaire de l'isocristal et donc le théorème de reconstruction des systèmes locaux isotriviaux (cf. la proposition 3.8) nous donne directement :

Proposition 9.1. — *Soient $k \geqslant 1$ un entier et $\mathbb{Q}_{p^2} \hookrightarrow D$ un plongement de l'extension quadratique non ramifié de $\mathbb{Q}_p$. Alors, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = k + 1$ et $0 \leqslant a < b$ il existe un $\mathbb{Q}_{p^2}$-système local fortement isotrivial $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$, G-équivariant et tel que*

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^2} = \bigoplus_{\substack{a+b=k+1 \\ 0\leqslant a<b}} \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \check{W}_{a,b}.$$

De plus, ce système local est donné explicitement par

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]} = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_{p^2}}^{b-a-1} \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[0,2]} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det{}^a.$$

On note $\check{\mathbf{D}}^{[a,b]} = \mathbb{D}(\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]})$ l'isocristal correspondant. Cette décomposition permet de réduire le calcul de la cohomologie du système local en écartant la partie algébrique de l'action de $\check{G}$. Dans la suite, on sera emmené à modifier légèrement le système local pour que l'action soit unitaire. Ainsi, on définit $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ comme le L-système obtenu en tordant les actions de G par la puissance de la norme, qui rend l'action unitaire, i.e. par $\otimes L \cdot |\det|_{\mathbb{Q}_p}^{\frac{1-a-b}{2}}$. À partir de la décomposition ceci définit de même $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}$.

Corollaire 9.2. — *La cohomologie proétale admet la décomposition suivante :*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) = \bigoplus_{\substack{a+b=k+1 \\ 0\leqslant a<b}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big) \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \check{W}_{a,b}.$$

On va utiliser la décomposition du $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ét}}$ (cf. lemme 7.7) pour se débarasser des caractères. Le système local $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ se restreint aux composantes connexes de $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ en un système local que l'on note toujours $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$ qui n'est plus tout à fait G-équivariant mais l'est sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui stabilise les composantes connexes. Notons que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\check{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)$ est un $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ét}} \coloneqq \mathrm{H}^0_{\mathrm{ét}}\big(\check{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, L(1)\big)$-module et le lemme 7.7 donne le corollaire suivant :

Corollaire 9.3. — *La cohomologie proétale de la tour se décompose suivant les caractères comme suit :*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big) = \bigoplus_{\delta\colon \mathbb{Z}_p^{\times}\to L} \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)[\delta],$$

où la somme porte sur les caractères lisses $\delta\colon \mathbb{Z}_p^{\times} \to L$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)[\delta] \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\dot{\mathrm{M}}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big) \otimes \delta$.

Ces corollaires nous permettent de ramener le calcul de la cohomologie proétale du système local au calcul de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big(\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)$ ou au calcul de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)$. La différence entre ces deux espaces est que le second est une somme de deux copies du premier, où l'une des copies est tordue par le caractère quadratique.

9.2. L'oper de Drinfeld

9.2.1. *Filtration de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes W_{a,b}$.* — On traitera le cas de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}$ qui nous intéresse mais il est facile d'en déduire les calculs lorsqu'on tord par le déterminant, comme on l'énoncera dans la dernière proposition. On suit de près [**42**, Paragraphe 5]. On définit l'élément $f=(\pi(z)e_1-e_0)$ qui vit dans $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,2}$ et qui vérifie, pour $g\in G$, la relation $g\cdot f=j(g,z)^{-1}f$. Ainsi, on définit sur $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}$ une filtration décroissante de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$-modules qui est G-équivariante, $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}=F^0\supset F^1\supset\dots F^{k+1}=0$, définie pour $q\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant q\leqslant k$

$$F^q=\bigoplus_{j=0}^{k-q}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}f^qe_1^{k-q-j}e_0^j.$$

De plus, les $e_0^je_1^{k-j}$ forment une $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$-base de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}$ et de la formule $e_0e_1^j=\pi(z)e_1^{j+1}-fe_1^j$ on déduit par récurrence que pour $j\in\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant j\leqslant k-q$,

$$f^qe_1^{k-q-j}e_0^j\in\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}f^qe_1^{k-q}+F^{q+1}.$$

Ainsi, les $f^qe_1^{k-q}$ avec $0\leqslant q\leqslant k$ forment une $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$-base de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}$ et donc on définit un isomorphisme de $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$-modules $\Theta_q\colon\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\to F^q/F^{q+1}$ par $\Theta_q(h)=hf^qe_0^{k-q}$. Un petit calcul montre qu'il donne un isomorphisme G-équivariant $\Theta_q\colon\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{2q-k,q-k\}\xrightarrow{\sim}F^q/F^{q+1}$. En effet, soit $h\in\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$, on a pour $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$g\cdot[hf^qe_1^{k-q}]=j(g,z)^{-q}\det(g)^{q-k}g\cdot hf^q\underbrace{(-ce_0+ae_1)^{k-q}}_{(j(g,z)e_1+cf)^{k-q}}\in j(g,z)^{k-2q}\det(g)^{q-k}g\cdot hf^qe_1^{k-q}+F^{q+1}.$$

Soit $\Omega^n_{\mathrm{Dr}}:=\Omega^1({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$, rappelons que $\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\cong\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{2,1\}$. Naturellement, on a une filtration G-équivariante $\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}=\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^0\supset\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^1\supset\dots\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^{k+1}=0$ et les quotients successifs sont décrits par $\Theta'_q\colon\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{2(q+1)-k,q+1-k\}\xrightarrow{\sim}\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^q/\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^{q+1}$. De plus, la dérivée donne

$$(d\otimes\mathrm{id})(hf^qe_1^{k-q})=dz\otimes qf^{q-1}e_1^{k-q+1}+dh\otimes f^qe_1^{k-q}.$$

Ainsi,

$$(d\otimes\mathrm{id})(hf^qe_1^{k-q})\in dz\otimes qf^{q-1}e_1^{k-q+1}+\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^q.$$

On en déduit que $d\otimes\mathrm{id}\colon F^q/F^{q+1}\to\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^{q-1}/\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^q$ s'identifie à la multiplication par q si $1\leqslant q\leqslant k$ et $d\otimes\mathrm{id}$ induit un isomorphisme $F^1\xrightarrow{\sim}\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_F W_{0,k+1}/\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^k$ de sorte que

$$\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{0,k+1}=(d\otimes\mathrm{id})(F^1)\oplus\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^k.$$

Ces calculs prouvent en réalité le lemme suivant :

Lemme 9.4. — *Le système local $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$ est un L-oper de poids $(a,b-1)$.*

Résumons les calculs précédents, en tordant par $\det^{-a}$, dans une proposition :

Proposition 9.5. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$. En tant que $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$-module, $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{a,b}$ est muni d'une filtration $G\times\check{G}$-équivariante $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes W_{a,b}=F^a\supsetneq F^{a+1}\supsetneq\dots\supsetneq F^b=0$ telle que*

$$F^q/F^{q+1}\cong\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{2q-b-a+1,q-b-a+1\}.$$

En suivant Schneider-Stuhler, les calculs ci-dessus donnent une suite exacte :

$$0\to\mathbb{Z}[\pi_0({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})]\otimes_{\mathbb{Z}}W_{0,k+1}\to\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}W_{0,k+1}/F^1\to\Omega^n_{\mathrm{Dr}}\otimes_{\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}}F^k\to\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W_{0,k+1}\to 0.$$

Finalement, ceci nous invite à introduire le *petit complexe de de Rham* :

$$\mathrm{DR}^{[a,b]}_n\colon\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{a-b+1,1-b\}\xrightarrow{(u^+)^{b-a}}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{b-a+1,1-a\}$$

où $u^+ \in \mathfrak{g}$ opère sur $h \in \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$ par $u^+(h) = h'$, où h' est défini par $d(h) = h'dz$. On a montré que le petit complexe de de Rham est quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{a,b} \xrightarrow{(d\otimes \mathrm{id})} \Omega^n_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{a,b}$. On remarque que $\mathrm{DR}^{[a,b]}_n = \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Op}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathcal{E}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}})$ et donc la proposition 4.5 nous assure que ce complexe est quasi-isomorphe au complexe de de Rham, ce qui apparaît dans la suite exacte ci-dessus. Plus précisément, le complexe $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{a,b} \xrightarrow{(d\otimes \mathrm{id})} \Omega^n_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{a,b}$ est quasi-isomorphe, de manière $G \times \check{G}$-équivariante, au complexe $\mathrm{DR}^{[a,b]}_n$.

9.3. Calculs de cohomologie

Dans ce paragraphe on utilise la proposition 5.6 pour calculer la cohomologie proétale du système local $\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}$ sur la tour de Drinfeld. Rappelons quelques notations, introduites pour alléger nos diagrammes :

$$\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}} := \mathcal{O}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}),\ \pi^n_0 := \pi_0({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}).$$

De plus, rappelons qu'on note $\mathbf{D}_k := \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{D}$ muni de ses structures additionnelles.

9.3.1. *Filtration de Hodge.* — Dans ce paragraphe, on relie la filtration de Hodge à la filtration étudiée au paragraphe 9.2.1 dans le but de calculer le terme $\mathrm{H}^0\mathrm{DR}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}, \underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr},k})$. On commence par observer que la décomposition du fibré $\underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr},k}$ induit une décomposition

$$\mathrm{H}^0\mathrm{DR}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}, \underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr},k}) = \bigoplus_{\substack{a+b=k+1\\ 0\leqslant a<b}} \mathrm{H}^0\mathrm{DR}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}, \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}) \otimes_L \underline{\check{W}}_{a,b}.$$

Rappelons qu'on a $\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) = \underline{W}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}$. On montre facilement qu'à un décalage près, la filtration G-stable du paragraphe 9.2.1 coïncide, après décalage, avec la filtration de Hodge :

Lemme 9.6. — *Sur $\mathcal{E}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ la filtration de Hodge est donnée par*

$$\mathcal{E}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) = \widetilde{F}^{-b+1} \supsetneq \cdots \supsetneq \widetilde{F}^{-a} \supsetneq 0,$$

où pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a $F^i = \widetilde{F}^{i+a+b-1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{W}_{a,b}$.

9.3.2. *Diagramme fondamental pour l'espace de Drinfeld.* — Pour réduire la taille du diagramme, on introduit quelques notations. Pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$, on note

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] &:= \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{a-b+1, 1-b\} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot |\mathrm{det}|_p^{\frac{1-a-b}{2}}, \\ \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] &:= \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}\{b-a+1, 1-a\} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot |\mathrm{det}|_p^{\frac{1-a-b}{2}}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

De plus, on rappelle qu'on a la notation, pour tout $k, j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_{k,j} := (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}})^{\varphi^k = p^j}$ qui est un espace de Banach-Colmez de Dimension (k, j).

Théorème 9.7. — *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$ et $n \geqslant 0$ un entier. On a un diagramme commutatif, $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \times G$-équivariant d'espaces de Fréchet, dont les lignes sont exactes*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \underline{W}^{\pi^n_0}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} t^a \mathrm{U}_{2,b-a} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & (\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}})^{\varphi = p^{a+b}, N=0} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{W}^{\pi^n_0}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b \arrow[r] & \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b \arrow[r] & \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\left({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}\right) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La première flèche horizontale en haut à gauche est injective si et seulement si $b \neq a+1$ et sinon est de noyau $\mathbb{Q}_p(a+1)$. De plus, les flèches verticales sont injectives d'image fermée.

10. Cohomologie étale isotriviale de $\mathrm{M}_{\mathrm{Dr},C}^{\infty}$ et vecteurs bornés

Dans cette sous-section on montre que les vecteurs G-bornés de la cohomologie isotriviale proétale de la tour de Drinfeld coïncide avec la cohomologie étale. Rappelons qu'un vecteur $v \in \Pi$ d'une L-représentation Π de G est dit *G-borné* si l'ensemble $\{g \cdot v\}_{g \in G}$ est borné. On dit qu'un sous-ensemble X d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique est *borné* si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X on a $p^n x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$. Dans un espace Fréchet dont la topologie est définie par une famille de valuations $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ceci équivaut à l'existence pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'un $N_k \in \mathbb{Z}$ tel que $v_k(x) \geqslant N_k$ pour tout $x \in X$. On note $\Pi^{G\text{-b}} \subset \Pi$ le sous-espace des vecteurs G-bornés de Π, qui définit une sous-L-représentation de Π.

Théorème 10.1. — *L'application* $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)) \to \mathrm{H}^1_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))$ *est injective et induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^1_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1))^{G\text{-b}} \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)).$$

La preuve se fait en deux temps. Dans un premier temps, on montre que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1))$ est de torsion bornée, donc qu'il définit un réseau invariant dans $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1))$. Ceci montre une inclusion et on conclut alors en adaptant l'argument de [**14**, Proposition 2.12].

10.1. Annulations

Dans cette partie, on montre l'annulation de différents groupes de cohomologie proétale. Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Théorème 10.2. — *Soient $n \geqslant 0$ et $a, b \geqslant 0$ des entiers tels que $0 \leqslant a < b$. Si $i \geqslant 2$ alors*

$$\mathrm{H}^i_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = 0.$$

De plus,

$$\mathrm{H}^0_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = \mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = \begin{cases} 0 & si\ b \neq a+1, \\ \mathbb{Q}_p(a+1) & si\ b = a+1. \end{cases}$$

10.1.1. *Annulation de* $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}$. — On commence par montrer la seconde partie du théorème 10.2.

Proposition 10.3. — *Soient $n \geqslant 0$ et $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $0 \leqslant a < b$. On a*

$$\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = \mathrm{H}^0_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = \begin{cases} 0 & si\ b \neq a+1, \\ \mathbb{Q}_p(a+1) & si\ b = a+1. \end{cases}$$

De plus, si $Y \subset \mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ est un affinoïde, alors

$$\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(Y\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = \begin{cases} 0 & si\ b \neq a+1, \\ \mathbb{Q}_p(a+1) & si\ b = a+1. \end{cases}$$

Démonstration. — On propose une preuve de ce résultat en utilisant la cohomologie syntomique, qui est la même dans le cas de l'espace tout entier ou d'un sous-affinoïde surconvergent. On sait, par définition, que $\mathrm{H}^0_{\text{syn}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1))$ est le noyau de l'application

$$\left(\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]})\widehat{\otimes}_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\right)^{\varphi = p} \to \mathrm{H}^0\mathrm{DR}\left(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}\right).$$

Or, d'après le théorème 9.7, le noyau de cette application est le même que celui de

$$\underline{W}^{\pi_0^n}_{a,b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{U}_{2,b} \to \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}_b$$

qui est injective d'après le théorème 9.7 puisque $b \neq a+1$. D'après le théorème de comparaison

$$\mathrm{H}^0_{\text{pét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) \cong \mathrm{H}^0_{\text{syn}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)) = 0.$$

On propose une autre preuve de ce résultat. Soit $x \colon \mathrm{Spa}(C, C^+) \to Y$ un point géométrique. On montre que $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(x)$ est une représentation irréductible de $\pi_1^{\text{ét}}(Y\,;\, x)$. Or cette représentation se factorise par le quotient $\pi_1^{\text{ét}}(Y\,;\,x) \to \mathrm{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$ obtenu par l'application composée $\pi_1^{\text{ét}}(Y\,;\,x) \to \pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,x) \to \pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,x) \to \mathrm{O}_{\mathrm{D}}^{\times}$ et correspond au $\mathrm{Sym}^{b-a-1}_{\mathbb{Q}_{p^2}}\mathrm{D}$ où D est la représentation régulière de $\check{G}$ donnée par la translation sur D. Cette représentation est irréductible et non triviale, donc n'a pas d'invariants sous $\check{G}_n$, d'où le résultat. $\square$

10.1.2. *Annulation de* $\mathrm{H}^2_{\text{pét}}$. —
Proposition 10.4. — *Soit $n \geqslant 0$ un entier,*

$$\mathrm{H}^2_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big) = 0.$$

Démonstration. — Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$. Il suffit de montrer que $\mathrm{H}^2_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(2)\big)$ est nul. En vertu de la comparaison avec la cohomologie syntomique (i.e. le théorème 6.1), il suffit de montrer que

$$\mathrm{H}^2_{\text{syn}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(2)\big) = 0.$$

La définition de la cohomologie syntomique nous donne une suite exacte longue

$$\mathrm{H}^1\mathrm{HK}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}) \to \mathrm{H}^1\mathrm{DR}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}) \to \mathrm{H}^2_{\text{syn}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big) \to \mathrm{H}^2\mathrm{HK}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}).$$

Premièrement, comme $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ est une courbe Stein, on a $\mathrm{H}^2_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k}) = 0$ et donc

$$\mathrm{H}^2\mathrm{HK}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}) = 0.$$

Ainsi, il suffit de montrer que l'application $\mathrm{H}^1\mathrm{HK}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}) \to \mathrm{H}^2\mathrm{DR}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}})$ est surjective. Or, le corollaire 5.5 et le lemme 5.3 nous donnent

$$\mathrm{H}^1\mathrm{DR}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}\,;\,\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}\big)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_a$$
$$\mathrm{H}^1\mathrm{HK}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}) \cong \big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k}\,;\,\underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}\big)\widehat{\otimes}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p,N=0}.$$

On déduit de l'isomorphisme de Hyodo-Kato et du fait que les pentes de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k}\,;\,\underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}\big)$ sont $< -a$, que l'application naturelle

$$\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k}\,;\,\underline{\breve{\mathbf{D}}}^{[a,b]}\big)\widehat{\otimes}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p,N=0} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}\,;\,\underline{\mathcal{E}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}\big)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_a$$

est surjective, ce qui permet de conclure la preuve. $\square$

Remarque 10.5. — Comme pour la cohomologie à coefficients triviaux, il n'est pas clair du tout que $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) = 0$. On aimerait par exemple montrer que ce groupe s'identifie au vecteurs G-bornés de $\mathrm{H}^2_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ ce qui donnerait son annulation mais si on reprend la preuve pour le premier groupe de cohomologie, on voit qu'un $\mathrm{R}\varprojlim$ apparaît dont on ne sait pas prouver l'annulation.

Le théorème de comparaison syntomique-proétale assure que, pour $i \geqslant 2$, on a

$$\mathrm{H}^i_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}(i)\big) \cong \mathrm{H}^i_{\text{syn}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}(i)\big) = 0.$$

En effet, les termes qui apparaissent dans la cohomologie syntomique sont nuls en degrés $\geqslant i$. Ainsi, quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, les groupes de cohomologie proétales supérieurs sont nuls(7), ce qui permet d'énoncer le corollaire suivant, qui synthétise les résultats précédents :

Corollaire 10.6. — *Soient $n \geqslant 0$ et $a, b \geqslant 0$ des entiers tels que $0 \leqslant a < b$. On suppose de plus que $b \neq a+1$. Alors $\mathrm{H}^i_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big) \neq 0$ si et seulement si $i = 1$.*

(7) On peut aussi raisonner en utilisant que les affinoïdes sont de dimension cohomologique 1 et donc que les espaces Stein sont de dimension cohomologique au plus 2.

10.2. Torsion dans la cohomologie étale

Dans cette partie, on montre que la cohomologie étale du $\mathbb{Z}_p$-système local est de torsion bornée.

10.2.1. *Réseaux dans le* $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}$. — Soit $n \geqslant 0$ un entier. On a $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}\big) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ où $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}$ est le réseau standard donné par les puissances symétriques du $\mathrm{O_D}$-module formel spécial universel. En d'autres termes, on a

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}\big) = \varprojlim_m \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{G}[p^m]_C\big).$$

Il s'agit de montrer que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}\big)$ est de torsion bornée. Pour cela on va utiliser le résultat pour les coefficients triviaux, que l'on rappelle.

Lemme 10.7. — *Soit Y_C un affinoïde de dimension 1 sur C. Alors $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{Q}_p$ dont la boule unité est donnée par $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Z}_p(1)\big)$.*

Démonstration. — La preuve utilise la suite exacte de Kummer. Pour $n \geqslant 1$ un entier, la suite exacte longue associée à la suite exacte de faisceaux étales

$$0 \to \mathbb{Z}/p^n(1) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},Y_C} \xrightarrow{[p^n]} \mathbb{G}_{\mathrm{m},Y_C} \to 0$$

fournit

$$0 \to \big(\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times\big)/\big(\mathcal{O}(Y_C)/C^\times\big)^{\times,p^n} \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Z}/p^n(1)\big) \to \mathrm{Pic}(Y_C)[p^n] \to 0.$$

En passant à la limite, l'annulation du $\mathrm{R}^1 \varprojlim$ fournit la suite exacte

$$0 \to \big(\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times\big)^\wedge \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Z}_p(1)\big) \to T_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big) \to 0,$$

où $\big(\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times\big)^\wedge$ est le complété p-adique du groupe $\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times$ et $T_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big) = \varprojlim_n \mathrm{Pic}(Y_C)[p^n]$ est le module de Tate du groupe de Picard de Y_C. Ainsi, comme $\big(\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times\big)^\wedge$ et $T_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big)$ sont sans torsion, il en est de même pour $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Z}_p(1)\big)$. En inversant p dans la suite exacte on obtient bien

$$0 \to \big(\mathcal{O}(Y_C)^\times/C^\times\big)^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big) \to V_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big) \to 0,$$

où $V_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big) = T_p\big(\mathrm{Pic}(Y_C)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est le module de Tate rationnel du groupe de Picard de Y_C. Ainsi $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Z}_p(1)\big)$ définit bien un réseau dans $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y_C\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big)$ qui est donc un $\mathbb{Q}_p$-espace de Banach. $\square$

Un corollaire immédiat est le résultat suivant pour les espaces Stein :

Corollaire 10.8. — *Soit X_C un espace Stein sur C. Alors l'application naturelle $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Z}_p(1)\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big)$ est injective et définit un réseau.*

Remarque 10.9. — Pour comparer, rappelons que $\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(X_C\,;\,\mathbb{Q}_p(1)\big)$ est un espace de Fréchet, comme limite inverse d'espaces de Banach.

Pour utiliser ce résultat on doit trivialiser le système local. Pour cela, on utilise le revêtement proétale

$$\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \to \mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C} \to \mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}.$$

Le groupe de Galois de la composée des deux flèches est $\check{G}^1 \subset \check{G}$, le noyau de la norme réduite et correspond au quotient

$$\pi_1(\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}, \bar{x}) \to \check{G}^1.$$

De plus, le groupe de Galois de la seconde flèche est $\check{G}^1/\check{G}^1(n)$, où on rappelle que $\check{G}^1(n) = \check{G}(n) \cap \check{G}^1$ et $\check{G}(n) := (1 + \varpi_{\mathrm{D}}\mathrm{O_D})$, et le groupe de Galois de la première flèche est $\check{G}^1(n)$. Ainsi, on obtient une suite exacte pour $n \geqslant 1$

$$1 \to K_n \to \pi_1(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}, \bar{x}) \to \check{G}^1(n) \to 1.$$

On va étudier la suite d'inflation-restriction de cette suite pour montrer le résultat suivant :

Proposition 10.10. — *Soit* $n \geqslant 0$ *un entier. Le noyau de l'application naturelle* $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ *est de torsion p-primaire bornée, et son image définit un réseau.*

Démonstration. — D'après le paragraphe 4.1.2 appliqué au revêtement $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \to \mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ on a

$$\mathrm{R}\Gamma\big(\check{G}^1(n)\,;\,\mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big) = \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big).$$

Ceci donne une suite spectrale dont la suite des premiers termes est

$$0 \to \mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C})\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)^{\check{G}(n)}.$$

Rappelons que le revêtement considéré trivialise le système local. Ainsi $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ est sans torsion d'après le corollaire 10.8 et donc a fortiori $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)^{\check{G}(n)}$ est sans torsion. Montrons maintenant que $\mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C})\big)$ est de torsion p-primaire et de type fini.

Rappelons (cf. 7.3.2) qu'on a une application $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C} \to \mathbb{Z}_p^\times$, donnant les composantes connexes de la tour, comme l'action de $\check{G}$ sur $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}$ induit sur $\mathbb{Z}_p^\times$ l'action de la norme réduite et donc $\check{G}^1$ fixe les fibres de l'application $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr}} \to \mathbb{Z}_p^\times$. De plus, on sait qu'en un point de $\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr}}$, le germe du système local, trivial sur cet espace, est simplement $\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{O_D}$. On en déduit que $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}) = \mathrm{Ind}^{\check{G}}_{\check{G}^1}\big(\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{O_D}\big)$ en tant que représentation de $\check{G}(n) \subset \mathrm{O}_\mathrm{D}^\times$ où $\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{O_D}$ est considéré comme une représentation de $\check{G}^1(n)$. Or, d'après la proposition 8.5, $\mathrm{H}^1\big(\check{G}(n)\,;\,\mathrm{Ind}^{\check{G}}_{\check{G}^1}\big(\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{O_D}\big)\big)$ est de torsion p-primaire bornée. Ceci achève la preuve. □

10.3. Vecteurs bornés de la cohomologie proétale isotriviale

10.3.1. *Fin de la preuve.* — On termine la démonstration du théorème 10.1. Montrons que tout vecteur G-borné de $\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ appartient à $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$. On procède comme dans la preuve de [**15**, Proposition 2.12] en choisissant un sous-groupe cocompact $\Gamma \subset G$ opérant sans point fixe sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On choisit ensuite des affinoïdes $Y_1, \dots, Y_r$ de $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$ avec les propriétés suivantes :

- Les $\gamma \cdot Y_i$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $i = 0, \dots r$ forment un recouvrement de $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}$.
- Les intersections de trois $\gamma \cdot Y_i$ correspondant à des couples (γ, i) distincts deux à deux sont vides.

Le calcul de la cohomologie de Cech pour ce recouvrement donne alors des suites exactes

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \prod_{(\gamma,i)} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\gamma \cdot Y_i\,;\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \prod_{(\gamma,i)\neq(\gamma',i')} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\gamma \cdot Y_i \cap \gamma' \cdot Y_{i'}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big),$$

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \prod_{(\gamma,i)} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\gamma \cdot Y_i\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \to \prod_{(\gamma,i)\neq(\gamma',i')} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\gamma \cdot Y_i \cap \gamma' \cdot Y_{i'}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big),$$

où le 0 à gauche provient du théorème d'annulation 10.2. Notons Y un affinoïde contenant tous les Y_i. On déduit des suites exactes précédentes que la cohomologie étale entière s'injecte dans la cohomologie proétale et s'identifie aux vecteurs $v \in \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ tels que $\mathrm{Res}_{\gamma\cdot Y}(v) \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\gamma \cdot Y\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, où on note Res le morphisme en cohomologie de restriction à un sous-espace. De manière équivalente :

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) = \big\{v \in \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ \mathrm{Res}_Y(\gamma \cdot v) \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big\}.$$

Soit $v \in \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ un vecteur G-borné, il est en particulier Γ-borné. Ainsi,

$$\{\mathrm{Res}_Y(\gamma \cdot v); \gamma \in \Gamma\} \subset \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$$

est une partie bornée et donc il existe un $N \geqslant 1$ tel que

$$\{\mathrm{Res}_Y(\gamma \cdot v); \gamma \in \Gamma\} \subset p^{-N}\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(Y\,;\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big).$$

Finalement, par la description que l'on a donnée de la cohomologie étale, il vient que $v \in p^{-N}\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^+_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$, et donc $v \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$. Ceci conclut la preuve. □

10.3.2. *Reformulation.* — On reformule le théorème principal en termes des multiplicités des représentations de G.

Corollaire 10.11. — *Soient* Π *une* L*-représentation de Banach unitaire de* G*,* $k \geqslant 0$ *et* $n \geqslant 0$ *des entiers. Alors les injections* $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big) \hookrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)$ *et* $\Pi' \hookrightarrow (\Pi^{\mathrm{lan}})'$ *induisent un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi',\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big) \cong \mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})',\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big).$$

Démonstration. — La preuve est la même que [**16**, Lemme 5.9], reprenons-la. Soient $a,b \in \mathbb{N}$ tels que $a+b=k+1$ et $0<a\leqslant b$. Il suffit de montrer la proposition précédente pour $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}$. Pour définir une flèche entre ces deux entrelacements, on considère $f\colon (\Pi^{\mathrm{lan}})' \to \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$. Alors, d'après le théorème 10.1, f envoie Π' dans les vecteurs G-bornés de la cohomologie proétale, i.e. dans $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$. Ceci définit

$$\iota\colon \mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})',\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) \to \mathrm{Hom}_G\big(\Pi',\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big).$$

Comme Π' est dense dans $(\Pi^{\mathrm{lan}})'$, cette flèche est injective. Pour montrer que c'est un isomorphisme, montrons qu'elle est surjective.

Soit $f\colon \Pi' \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ un morphisme continu de $L[G]$-modules. Pour $K \subset G$ un sous-groupe ouvert compact de G ; notons $\mathscr{D}(K,L)$ l'algèbre des distributions localement analytiques sur K à valeurs dans L et $\Lambda^{\mathrm{lan}}(K,L)=L[[K]]$ l'algèbre des mesures sur K à valeurs dans L. Rappelons que $\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ est un G-Fréchet ; il s'identifie à un sous-Fréchet K-stable de $\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b]$ qui est un $\mathscr{D}(K,L)$-module topologique. En effet, puisque $\Omega^1\left({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\right)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}C$ est un $\mathscr{D}(K,L)$-module topologique d'après [**23**, Théorème 3.2] et que $\underline{W}_{a,b}$ est une représentation algébrique de dimension finie de K, donc un $\mathscr{D}(K,L)$-module topologique, on obtient finalement que $\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b] \subset \Omega^1\left({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\right)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}C\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}$, qui est un plongement fermé, est un $\mathscr{D}(K,L)$-module topologique. Ainsi, f se prolonge en une application

$$g\colon \Pi'\otimes_{L[[K]]}\mathscr{D}(K,L) \to \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big).$$

D'après le théorème [**43**, Theorem 7.1] $\Pi'\otimes_{L[[K]]}\mathscr{D}(K,L) \cong (\Pi^{\mathrm{lan}})'$ et donc g définit un morphisme continu de $L[G]$-modules $g\colon (\Pi^{\mathrm{lan}})' \to \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ qui, par construction, est un antécédent de f par ι. Donc ι est surjective, ce qui permet de conclure la preuve. □

10.4. Résultat de finitude

Dans ce paragraphe on démontre le résultat de finitude suivant :

Proposition 10.12. — *Soient* $k \geqslant 0$ *et* $n \geqslant 0$ *des entiers et soit* K *une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$*. Alors l'espace de cohomologie étale suivant*

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},K}\,;\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)$$

est le dual stéréotypique d'un $\mathbb{Z}_p[G]$*-module lisse de longueur finie.*

Démonstration. — Pour $k=0$, c'est le théorème 4.1 de [**16**]. De plus, ce résultat nous dit que si $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{F}_p$-système local étale constant, i.e. $\mathbb{L} \cong \underline{M}$ où M est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout entier $n \geqslant 0$, l'espace de cohomologie étale

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},K}\,;\mathbb{L}\big)$$

est le dual d'un $\mathbb{Z}_p[G]$-module de longueur finie. On fixe maintenant $k \geqslant 0$ un entier. On sait que par définition, $\mathbb{V}^+_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D \cong \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathcal{G}[\varpi_D]$ est un $\mathbb{F}_p$-système local trivial sur ${}^p\mathrm{M}^1_{\mathrm{Dr},K}$ et donc a fortiori sur ${}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},K}$ dès que $n \geqslant 1$. Ainsi, on a montré le résultat dès que $n \geqslant 1$ et il reste à le démontrer pour $n=0$, ce que l'on va faire par un argument de descente galoisienne à partir de ${}^p\mathrm{M}^1_{\mathrm{Dr},K}$.

On sait que ${}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} \to {}^{p}\mathrm{M}^{0}_{\mathrm{Dr},K}$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathrm{O}_{\mathrm{D}}^{\times}/(1+\varpi_D\mathrm{O}_{\mathrm{D}}) \cong \mathbb{F}_{p^2}^{\times}$. De plus, $\mathbb{F}_{p^2}^{\times}$ agit naturellement sur $\mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D$. Ainsi, on obtient une suite spectrale

$$E_2^{i,j} : \mathrm{H}^i\big(\mathbb{F}_{p^2}^{\times} ; \mathrm{H}^j_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)\big) \implies \mathrm{H}^{i+j}_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{0}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big).$$

De plus, on sait que sur ${}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K}$ on a $\mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D \cong \underline{\mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^2}}$. La suite des termes de bas degré s'écrit donc

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_{p^2}^{\times} ; \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^2}\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{0}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)^{\mathbb{F}_{p^2}^{\times}} \to \mathrm{H}^2\big(\mathbb{F}_{p^2}^{\times} ; \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^2}\big).$$

Or, comme $\mathbb{F}_{p^2}^{\times}$ est un groupe d'ordre premier à p, on en déduit que

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{F}_{p^2}^{\times} ; \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^2}\big) = \mathrm{H}^2\big(\mathbb{F}_{p^2}^{\times} ; \mathrm{Sym}^k_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^2}\big) = 0.$$

Ainsi, on a un isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{0}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)^{\mathbb{F}_{p^2}^{\times}}$. De plus, $\mathbb{F}_{p^2}^{\times}$ agit continument sur l'espace de cohomologie étale, donc

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)^{\mathbb{F}_{p^2}^{\times}} \subset \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{1}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D\big)$$

est un sous-espace fermé et c'est donc le dual d'une représentation lisse de G, admissible et de longueur finie.

□

Remarque 10.13. — On peut déduire de ce théorème que pour tout entier $l \geqslant 0$, l'espace de cohomologie étale

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^{n}_{\mathrm{Dr},K} ; \mathbb{V}^{+}_{\mathrm{Dr},k}/\varpi_D^{l}\big)$$

est le dual stéréotypique d'un $\mathbb{Z}_p[G]$-module lisse de longueur finie.

11. Le cas cuspidal

11.1. Changement de poids dans la correspondance de Langlands locale

11.1.1. *Normalisation des correspondances de Langlands.* — Soient $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $0 \leqslant a < b$. Rappelons que pour M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module on a défini une L-représentation unitaire de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(M)$, une L-représentation unitaire lisse de $\check{G}$ notée $\mathrm{JL}(M)$ et une L-représentation unitaire lisse de G notée $\mathrm{LL}(M)$. On définit alors des L-représentations unitaires localement algébriques de $\check{G}$ et G respectivement par $\mathrm{JL}_M^{[a,b]} := \mathrm{JL}(M) \otimes_L \underline{\check{W}}_{a,b}$ et $\mathrm{LL}_M^{[a,b]} := \mathrm{LL}(M) \otimes_L \underline{W}^*_{a,b}$. On normalise le corps de classe de sorte à ce que $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Q}_p^\times$ envoie le Frobenius arithmétique sur $p \in \mathbb{Q}_p^\times$.

Pour $\alpha \in L^\times$ on définit $\mathrm{nr}_\alpha \colon \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ le caractère non ramifié, i.e. trivial sur $\mathbb{Z}_p^\times$, qui envoie p sur α. Ceci définit un L-caractère lisse $\mathrm{nr}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p},\alpha}$ de $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$ et de même, en composant avec le déterminant et la norme réduite, on définit des L-caractères lisses $\mathrm{nr}_{G,\alpha}$ de G et $\mathrm{nr}_{\check{G},\alpha}$ de $\check{G}$. Notons temporairement[8] $M[\alpha]$ le L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module déduit de M muni de l'opérateur de Frobenius $\alpha\varphi$. La compatibilité entre les correspondances s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathrm{WD}(M[\alpha^{-1}]) &= \mathrm{WD}(M) \otimes \mathrm{nr}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p},\alpha}, \\ \mathrm{LL}(M[\alpha^{-1}]) &= \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{nr}_{G,\alpha}, \\ \mathrm{JL}(M[\alpha^{-1}]) &= \mathrm{JL}(M) \otimes \mathrm{nr}_{\check{G},\alpha}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on dit que M est *p-compatible* si l'action de p, vue comme élément du centre de $\check{G}$, est triviale sur $\mathrm{JL}(M)$. Dans ce cas, M est de pentes $\frac{1}{2}$. De même pour $k \geqslant 0$ un entier, on dit que M est *(k,p)-compatible* si p agit trivialement sur $\mathrm{JL}_M^{[0,k+1]}$, ce qui implique que M est de pentes $\frac{k+1}{2}$. Cette condition est équivalente à ce que p opère trivialement sur $\mathrm{JL}_M^{[a,b]}$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a+b = k+1$. Si M est indécomposable, $\mathrm{JL}_M^{[a,b]}$ est irréductible et l'action de p est donnée par un élément $\lambda \in L$. Alors, si α est tel que $\lambda = \alpha^{-2}$, l'action de p sur $\mathrm{JL}_M^{[a,b]} \otimes \mathrm{nr}_{\check{G},\alpha}$ est triviale. De plus, rappelons que si $\mathrm{H}^\bullet$ est une théorie cohomologique raisonnable (par exemple, la cohomologie isotriviale), alors

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}, \mathrm{H}^1(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})\big) \cong \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]} \otimes \mathrm{nr}_{\check{G},\alpha}, \mathrm{H}^1({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})\big) \otimes \mathrm{nr}_{G,\alpha}^{-1} \otimes \mathrm{nr}_{\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p},\alpha}^{-1}.$$

Ceci nous permet de nous restreindre à la cohomologie de $\mathrm{H}^1({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})$. De plus, rappelons que l'on a défini

$$\mathrm{H}^\bullet({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}) := \varinjlim_n \mathrm{H}^\bullet({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})$$

11.1.2. *Cohomologie de Hyodo-Kato et de de Rham de la tour.* — On note $\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C}$ la fibre spéciale d'un model du n-ième revêtement de l'espace de Drinfeld. On calcule la cohomologie de Hyodo-Kato et de de Rham de la tour de Drinfeld à coefficients isotriviaux. Ces cohomologies, comme on l'a vu, s'expriment simplement en termes des cohomologies à coefficients constants et on obtient la proposition suivante :

Proposition 11.1. — *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$ et soit $k = a + b - 1$. Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module, absolument irréductible de dimension 2 et de pentes $\frac{k+1}{2}$. Soit $n \geqslant 0$ un entier assez grand[9] et $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie assez grande. On a un carré commutatif de $G \times \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-Fréchet*

[8] Dans le reste du texte, on préférera la notation $M[k]$ avec $k \in \mathbb{Z}$ pour désigner le L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module déduit de M muni de l'opérateur de Frobenius $p^k\varphi$.

[9] L'action de $\check{G}$ sur $\mathrm{JL}(M)$ se factorise par un certain quotient $\check{G}/\check{G}(m)$ où $\check{G}(m) = 1 + \varpi_{\mathrm{D}}^m \mathrm{O}_{\mathrm{D}}$ et il suffit de considérer l'entier n de l'énoncé plus grand que cet entier.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C}\,;\,\underline{\check{\mathbf{D}}}_k\big)\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \check{M}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime} \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr},k}\big)\big) \arrow[r, "\sim"] & C\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Notons que pour $k=0$, c'est un resultat de [**14**] que l'on va utiliser. On commence par montrer l'isomorphisme pour la cohomologie de Hyodo-Kato. L'argument pour la cohomologie de de Rham est exactement le même. On choisit L contenant les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_p$. On a

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C}\,;\,\underline{\check{\mathbf{D}}}_k\big)\big)\cong\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]\prime}\otimes_L\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C})\otimes\underline{\mathbf{D}}_{k,L}\big)^{\check{G}}.$$

Or, si on décompose le membre de droite avant de prendre les invariants sous $\check{G}$, en utilisant la décomposition de $\underline{\mathbf{D}}_{k,L}$ du corollaire 8.3, on obtient

$$\underbrace{\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{JL}(M)'}_{\text{lisse}\,\otimes\,\text{dual de lisse}}\otimes_L\underbrace{\underline{\check{W}}^*_{a,b}\otimes_L\bigoplus_{\substack{0\leqslant i<j\\ i+j=k+1}}(\underline{\check{W}}_{j,i}(L)}_{\text{algébrique}}\otimes_L\underbrace{W_{j,i}(L)}_{\text{lisse}}).$$

Les invariants sous $\check{G}$ sont en particulier inclus dans les vecteurs tués par l'algèbre de Lie $\check{\mathfrak{g}}$, qui opère puisque toutes les représentations sont localement algébriques. Or, dans la partie algébrique, la seule composante qui admet des vecteurs tués par $\check{\mathfrak{g}}$ est $\check{W}^*_{a,b}(L)\otimes_L\check{W}_{a,b}(L)$ et $\big(\check{W}^*_{a,b}(L)\otimes_L\check{W}_{a,b}(L)\big)^{\check{\mathfrak{g}}=0}\cong L$ par le lemme de Schur. Ainsi

$$\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]\prime}\otimes_L\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C})\otimes\mathbf{D}_{k,L}\big)^{\check{\mathfrak{g}}=0}=\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{JL}(M)'\otimes_L\underline{W}_{a,b}.$$

On en déduit

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C}\,;\,\check{\mathbf{D}}_k\big)\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)\cong\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M)\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},k_C})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)\otimes_L\underline{W}_{a,b}(L).$$

Mais par le résultat dans le cas $k=0$, on a $\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M)\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)\cong\check{M}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}(M)'$ ce qui permet de conclure puisque $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}=\mathrm{LL}(M)\otimes_L\underline{W}_{a,b}$. □

Une autre formulation du résultat précédent dans le cas de Rham est la décomposition de la cohomologie de de Rham à support compact de la tour.

Corollaire 11.2. — *On a un isomorphisme de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times\check{G}\times G$-modules lisses*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}\big({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Dr},k}\big)\otimes_{\mathbb{Q}_p}L=\bigoplus_{\substack{0\leqslant a<b\\ a+b=k+1}}\ \bigoplus_{M\in\Phi N_k^p}M\otimes_L\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\otimes_L\mathrm{LL}_M^{[a,b]\vee}\otimes_{\mathbb{Q}_p}C,$$

où $\mathrm{LL}_M^{[a,b]\vee}$ est le L-dual localement algébrique de $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}$.

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**14**, Théorème 5.8], qui donne le corollaire dans le cas $k=0$. Pour simplifier les notations, notons $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}\coloneqq\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}\big({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathcal{E}_{\mathrm{Dr},k}\big)$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\coloneqq\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}\big({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathcal{E}_{\mathrm{Dr},k}\big)$. On a une décomposition

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}=\bigoplus_{\substack{0\leqslant a<b\\ a+b=k+1}}\ \bigoplus_{M\in\Phi N_k^p}\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\otimes_L\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}[M,a,b].$$

Mais comme $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}$ est le C-dual de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}$, $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}[M,a,b]$ est le C-dual de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}[M^\vee[1],1-b,1-a]$. Or, on a montré qu'il existe une surjection

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}[M^\vee[1],1-b,1-a]\twoheadrightarrow M^\vee_{\mathrm{dR}}[1]\otimes_L\mathrm{LL}(M^\vee[1])\otimes_L\underline{W}_{a,b}.$$

Par dualité, ceci nous donne une injection entre $L[G]$-modules lisses

$$\bigoplus_{\substack{0\leqslant a<b\\ a+b=k+1}} \bigoplus_{M\in\Phi N_k^p} M\otimes_L \mathrm{JL}_M^{[a,b]}\otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\vee}\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} C\hookrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}.$$

Montrons que c'est un isomorphisme. Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$ et $a+b=k+1$; on commence par appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\underline{W}_{a,b}\,,\ \cdot\ )$ à cette flèche pour obtenir une injection

$$\bigoplus_{M\in\Phi N_k^p} M\otimes_L \mathrm{JL}_M^{[a,b]}\otimes_L \mathrm{LL}(M)^\vee\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} C\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\underline{W}_{a,b}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}). \tag{11.1}$$

Puisqu'on a la décomposition

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c}=\bigoplus_{\substack{0\leqslant a<b\\ a+b=k+1}}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\underline{W}_{a,b}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR},c})\otimes_L\underline{W}_{a,b},$$

il suffit de montrer que l'injection (11.1) est un isomorphisme ; pour cela, soit $j\geqslant 0$, prenons les G_j-invariants des deux côtés de cette inclusion. D'après le cas $k=0$, les deux membres ont même dimension et donc l'inclusion est un isomorphisme entre les G_j-invariants. En passant à la limite inductive, comme ce sont des représentations lisses, on obtient finalement que l'inclusion est un isomorphisme. □

11.2. Représentations supercuspidales de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$

Dans cette partie, on adapte deux lemmes de [**14**] en poids supérieur. On rappelle qu'on dit qu'une L-représentation W de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est *supercuspidale* si la représentation de Weil-Deligne associée $\mathrm{WD}(W)$ est irréductible et $N=0$. Rappelons de plus que si M est un L-$(\varphi,N,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ module, on note

$$\begin{gathered} X_{\mathrm{st}}(M)=(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{N=0,\varphi=1},\quad X_{\mathrm{st}}^+(M)=(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{N=0,\varphi=1}\\ X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M)=(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{N=0,\varphi=p^{k+1}},k\geqslant 0.\end{gathered}\tag{11.2}$$

Le lemme suivant est une généralisation immédiate de [**14**, Proposition 2.5] en poids supérieur.

Lemme 11.3. — *Soit $k\geqslant 0$ un entier. Soit W une L-représentation spéciale ou cuspidale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, de dimension d, et soient $M=\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(W)$. Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, alors :*

1. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V\,,\,X_{\mathrm{st}}(M[-k]))=\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}]}(M[-k]^*\,,\,\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*))$.
2. *Supposons que M est supercuspidale. Si $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V\,,\,X_{\mathrm{st}}(M[-k]))\neq 0$ où V est de dimension d, alors V est supercuspidale, $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V\,,\,X_{\mathrm{st}}(M))$ est de dimension 1 et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)\cong M[-k]$.*

Démonstration. — Soit K une extension galoisienne suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$. On a des isomorphismes $M\cong\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}M^{\mathscr{G}_K}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)\cong\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)^{\mathscr{G}_K}$ et $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*)^{\mathscr{G}_K}\cong\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)^{\mathscr{G}_K}$ qui fournissent

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V\,,\,X_{\mathrm{st}}(M[-k]))&=(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M\otimes_L V^*)^{N=0,\varphi=p^k,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}\\ =(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{K_0}M^{\mathscr{G}_K}\otimes_L V^*)^{N=0,\varphi=p^k,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}&=((\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*)^{\mathscr{G}_K}\otimes_{L\otimes K_0}M^{\mathscr{G}_K})^{N=0,\varphi=p^k,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}\\ =(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)\otimes_{L\otimes\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M[-k])^{N=0,\varphi=1,\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}&=\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}]}(M[-k]^*\,,\,\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)).\end{aligned}$$

Ceci prouve le premier point.

Pour le second point, supposons que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V\,,\,X_{\mathrm{st}}(M[-k]))\neq 0$. Donc par le point précédent, il existe un morphisme non nul $M[-k]^*\to\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$ qui est injectif puisque M est irréductible. De plus, comme $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$ est de dimension $\leqslant\dim_L V^*=d$ on en déduit que ce morphisme est un isomorphisme, i.e. $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)\cong M[-k]^*$. Ainsi V^* et donc V sont cuspidales, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)\cong\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^*$ et finalement $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)\cong M[-k]$. □

Si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal dont les pentes sont $\frac{b-a}{2}$ et si $\mathcal{L}$ est une L-droite de M_{dR}, rappelons qu'on a

$$V_{M,\mathcal{L}}^{[0,b-a]} = \mathrm{Ker}\big((M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+)^{\varphi=p^{b-a}} \to \mathrm{B}_{b-a} \otimes_{\mathbb{Q}_p} (M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L})\big).$$

Alors $V_{M,\mathcal{L}}^{[0,b-a]}$ est une L-représentation supercuspidale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 à poids de Hodge-Tate $(0, b-a)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}\big(V_{M,\mathcal{L}}^{[0,b-a]}\big) = M[a-b]$. Si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module dont les pentes sont $\frac{b+a}{2}$ on a alors $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} = V_{M[a],\mathcal{L}}^{[0,b-a]}(a)$.

Lemme 11.4. — *Soit $k \geqslant 0$ un entier. Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de rang 2 et de pentes $\frac{k+1}{2}$.*

1. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, X_{\mathrm{st}}^+(M[-k-1])\big)$ *est de dimension* 1 *sur L si $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $a+b = k+1$.*
2. *Si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ alors,* $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, X_{\mathrm{st}}^+(M[-k-1])\big)$ *est non nul si et seulement si $V \cong V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a+b = k+1$ et un unique $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$.*

Démonstration. — Le premier point se déduit de l'irréductibilité de $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$. Si V est une L-représentation de dimension 2 telle que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M)\big) \neq 0$ il resulte du lemme 11.3 que V est supercuspidale, que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M)\big)$ est de dimension 1 et que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*) \cong M[-k-1]^*$. Ainsi, il existe une filtration sur M_{dR} par des L-modules telle que $V = X_{\mathrm{st}}^+(M) \cap \mathrm{Fil}^{k+1}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})$ et comme $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M)\big)$ est de dimension 1 on obtient un plongement de V dans $X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M)$ et donc

$$V = \mathrm{Ker}\left[X_{\mathrm{st}}^{k+1}(M) \to (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})/\mathrm{Fil}^{k+1}\right].$$

Ainsi, on a $V \cong V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ pour un unique $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$, $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$ et $a+b = k+1$. □

11.3. La conjecture de Breuil-Strauch

Le but de cette partie est d'expliquer comment étendre la conjecture de Breuil-Strauch en poids supérieur en suivant [**12**] à partir de [**23**]. On commence par quelques rappels sur le changement de poids.

11.3.1. *Changement de poids.* — On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on note la base naturelle de $\mathfrak{g}$

$$u^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\, u^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\, a^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\, a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module de rang 2. Dans [**12**], Colmez associe à M une représentation localement analytique de G notée Π_M et décrit comment on peut en « changer les poids », i.e. définir des $\Pi_M^{[a,b]}$. On décrit maintenant la construction de $\Pi_M^{[0,k]}$ à partir de Π_M. Il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques

$$\partial \colon \Pi_M \to \Pi_M$$

tel que $a^+ = u^+\partial$, $u^- = -\partial u^+ \partial$, $\partial \circ w \circ \partial = w$, où

$$w \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout couple $(a, c) \in \mathbb{Q}_p^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'application $(a - c\partial) \colon \Pi_M \to \Pi_M$ est un isomorphisme. Ceci nous permet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, de définir une nouvelle action linéaire de G sur Π_M en posant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot_k v = (-c\partial + a)^{k-1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot v\right).$$

On note $\Pi_M^{[0,k]}$ la représentation de G ainsi obtenue. Finalement, pour $a, b \in \mathbb{N}$, on pose $\Pi_M^{[a,b]} := \Pi_M^{[0,b-a]} \otimes_L (\det)^a$. Notons que l'on ne suppose pas $0 \leqslant a < b$ dans cette définition. De plus, on note $\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} = \mathbf{\Pi}(V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]})$ la L-représentation unitaire et de Banach associée à $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ par la correspondance de Langlands p-adique. On rappelle les deux propositions suivantes (cf. [**12**, Théorème 0.6, Théorème 0.3, Corollaire 0.4]) :

Proposition 11.5. — *Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de rang 2 et soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$. Alors on a des suites exactes*

$$0 \longrightarrow {}^{\mathrm{lalg}}\Pi_M^{[a,b]} \longrightarrow \Pi_M^{[a,b]} \longrightarrow \Pi_M^{[b+1,a+2]} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]} \longrightarrow \Pi_M^{[a,b]} \longrightarrow {}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow {}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \longrightarrow {}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \longrightarrow \Pi_M^{[b+1,a+2]} \longrightarrow 0.$$

De plus, ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \cong (M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}) \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]}$ et ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi_M^{[a,b]} \cong M_{\mathrm{dR}} \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]}$. De plus $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}$ et $\Pi_M^{[b+1,a+2]}$ sont irréductibles, i.e. ${}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ a deux composantes de Jordan-Hölder.

Rappelons qu'on a défini le petit complexe de de Rham. On le tord maintenant par une puissance de la norme adaptée (i.e. par $\otimes_L |\cdot|_p^{\frac{1-a-b}{2}}$) : pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$, avec les notations introduites en (9.1), posons

$$\underline{\mathrm{DR}}_n^{[a,b]} \colon \mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^n[a,b] \xrightarrow{(u^+)^{b-a}} \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b].$$

Ce complexe est $G \times \check{G}$-équivariant et $\mathrm{H}^1 \underline{\mathrm{DR}}_n^{[a,b]} \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b}$. De plus, on a

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M)\,,\, \mathcal{O}_{\mathrm{Dr}}^n\{k,0\} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big) \cong \big(\Pi_M^{[2,k+2]}\big)',$$

qui est une représentation coadmissible de G. De l'isomorphisme de la proposition 11.1 On en déduit la proposition suivante :

Proposition 11.6. — *Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module. L'isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\, \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b}\big) \cong M^*_{\mathrm{dR}} \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime}$$

a la propriété que pour toute L-droite $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$, l'image inverse de $\mathcal{L}^\perp$ dans

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}_M^{[a,b]}\,,\, \omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b]\big)$$

est isomorphe à $\left({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\right)'$ et le petit complexe de de Rham induit la suite exacte

$$0 \to \big(\Pi_M^{[b+1,a+2]}\big)' \to \left({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\right)' \to \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime} \to 0.$$

11.3.2. *L'invariant $\mathcal{L}$.* — Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module spécial ou cuspidal de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et de pentes $(k+1)/2$ où $k \geqslant 0$ est un entier positif. On rappelle qu'on note $M_{\mathrm{dR}} = \big(M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \bar{\mathbb{Q}}_p\big)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ qui est un L-espace vectoriel de rang 2. Pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$ et $a + b = k + 1$ et toute L-droite $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$ on définit la représentation galoisienne

$$V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} := \mathrm{Ker}\left(\big(M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{N=0,\varphi=p^{k+1}} \to \frac{M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}{\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^a \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} + M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} t^b \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}\right).$$

Alors $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ est une L-représentation spéciale ou cuspidale de dimension 2 à poids de Hodge-Tate a et b et toute telle représentation est de la forme $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ pour un couple $(M, \mathcal{L})$. De plus $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} = V_{M[a],\mathcal{L}}^{[0,b-a]}(a)$. Aussi, $V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \cong V_{M',\mathcal{L}'}^{[a',b']}$ si et seulement si $(M, a, b, \mathcal{L}) = (M', a', b', \mathcal{L}')$. Rappelons qu'on note $\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} = \mathbf{\Pi}(V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]})$ la L-représentation unitaire et de Banach associée à

$V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ par la correspondance de Langlands p-adique et on désigne par ${}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \subset \Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}$ le sous-espace des vecteurs localement analytiques, qui est un sous-espace de type LB. Enfin, son dual $\big({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'$ est un espace de Fréchet.

Théorème 11.7. — *Soit* Π *une* L*-représentation unitaire de* G *qui est absolument irréductible. Alors*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b]\big) = \begin{cases} \mathcal{L} \otimes_L \mathrm{JL}(M) & \textit{si } \Pi = \Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]} \textit{ et } M \textit{ de niveau} \leqslant n, \\ 0 & \textit{si } \Pi \textit{ n'est pas de cette forme.} \end{cases}$$

Démonstration. — On peut supposer que $\Pi = \mathbf{\Pi}(V)$ où V est une L-représentation galoisienne absolument irréductible de dimension 2. Comme on a la décomposition

$$\omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b] = \bigoplus_{\Phi N_{a+b}^p} \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M] \otimes_L \mathrm{JL}(M),$$

il suffit de comprendre la multiplicité de Π' dans $\omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M]$ pour M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et de pentes $(a+b)/2$. Alors, d'après la proposition 11.1 on sait qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^1\big({}^p\mathrm{M}_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}^n ; \mathcal{E}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}\big)[M] \cong M_{\mathrm{dR}} \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime}.$$

D'après la proposition 11.6, on obtient pour chaque L-droite $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$ une suite exacte

$$0 \to \Big({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}_1}^{[a,b]}\Big)' \to \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M] \to (M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}) \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime} \to 0. \tag{11.3}$$

Or, d'après [**13**] on a $({}^{\mathrm{lan}}\Pi')^{G-\mathrm{b}} \cong \Pi'$ et on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \Big({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\Big)'\big) \cong \mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \Big(\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\Big)'\big) \cong \mathrm{Hom}_G\big(\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}, \Pi\big).$$

Ainsi, l'injectivité de la correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ pour les représentations galoisiennes irréductibles de dimension 2 et le lemme de Schur assurent que

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \Big({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}\Big)'\big) \cong \begin{cases} L & \text{si } V \cong V_{M,\mathcal{L}}^{[a,b]}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11.4}$$

De plus, par la compatibilité entre les correspondances de Langlands locales p-adiques et classiques ainsi que l'irréductibilité de $\mathrm{LL}_M^{[a,b]}$ en tant que représentation localement algébrique, on a

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime}\big) \cong \begin{cases} L & \text{si } V \text{ est de type } (M,a,b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11.5}$$

De ces deux calculs on peut déduire le théorème.

- Si V n'est pas de type (M,a,b) alors on obtient
$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M]\big) = 0.$$
- Supposons maintenant que V est de type (M,a,b), plus précisément supposons que $V = V_{M,\mathcal{L}_1}^{[a,b]}$ pour $\mathcal{L}_1 \subset M_{\mathrm{dR}}$. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_G(\Pi', \cdot\,)$ à la suite exacte (11.3) pour $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_1$, ce qui nous assure d'après (11.4) qu'on a une inclusion
$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M]\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G\big(\Pi', (M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}) \otimes_L \mathrm{LL}_M^{[a,b]\prime}\big).$$
Donc, d'après (11.5), $\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M]\big)$ est de L-dimension $\leqslant 1$. On applique maintenant le même foncteur à la suite exacte (11.3) pour $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$. D'après (11.4), on en déduit que
$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega_{\mathrm{Dr}}^n[a,b][M]\big) \neq 0,$$

et donc que $\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big)$ est de L-dimension 1. Il reste à justifier que $\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big) \cong \mathcal{L}_1$. Mais on a obtenu la suite exacte

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \big({}^{\mathrm{lan}}\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\big)'\big)}_{\cong L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big) \xrightarrow{0} \underbrace{\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', (M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}) \otimes_L \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\big)}_{\cong M_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}}.$$

Or, comme la dernière flèche est induite par l'inclusion naturelle $\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G\big(\Pi', M_{\mathrm{dR}} \otimes_L \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\big)$, on en déduit une inclusion $\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big) \hookrightarrow \mathcal{L}$ et donc finalement, on a bien montré que

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big) = \mathcal{L}.$$

□

11.4. Entrelacements supercuspidaux

11.4.1. *Multiplicité des $V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ dans la cohomologie proétale.* — Dans ce paragraphe on va calculer l'entrelacement d'une représentation supercuspidale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de la forme $V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ avec la cohomologie proétale isotriviale, puis d'une représentation supercuspidale de G de la forme $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$. Comme dans le cas à coefficients constants, la cohomologie proétale contient des représentations de dimension arbitrairement grande, donc on ne peut pas espérer en général que l'entrelacement donne une représentation de G qui ait un lien avec la correspondance de Langlands p-adique. Mais si la représentation galoisienne est de la forme $V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$, alors l'entrelacement est celui espéré, ce que l'on va montrer dans ce paragraphe. On note

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M,a,b] := \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M), \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}; \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big).$$

Corollaire 11.8. — *Soient $a,b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$. Si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de pentes $\frac{a+b}{2}$ et de rang 2. Le diagramme commutatif suivant de $(G\times\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-espaces de Fréchet est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^{\infty}_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b] \arrow[r] \arrow[d, hook] & t^a X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^{\infty}_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^{\infty}_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] & (t^a\mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de pentes $\frac{a+b}{2}$ et de rang 2. On obtient le diagramme en appliquant $Z \mapsto Z[M]$ au diagramme du théorème 9.7. Comme ce foncteur est exact, l'exactitude des suites est conservée et de plus :

- Comme l'action de $\check{G}$ sur les composantes connexes est donnée par la norme réduite on a $\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M), \underline{W}^{\pi_0^n}_{a,b}\big) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que le foncteur tue les deux termes tout à gauche du diagramme dans le théorème 9.7.
- Les deux termes à droite sont donnés par la proposition 11.1.

□

Notons que comme on a

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^{\infty}_{\mathrm{Dr},C}; \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big) := \varinjlim_n \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^{n}_{\mathrm{Dr},C}; \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$$

ce corollaire et le théorème 11.7 impliquent qu'à M fixé, il existe un $n \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M,a,b] = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^{n}_{\mathrm{Dr},C}; \underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$. On utilisera librement ce fait dans la suite.

Soit $k \geqslant 0$ un entier. Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module supercuspidal de rang 2 et soient

$$M_{\mathrm{dR}} = (C \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}, \quad X^k_{\mathrm{st}}(M) = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\varphi=p^k}.$$

Alors M_{dR} est un L-module de rang 2 et $X^+_{\mathrm{st}}(M)$ est un L-Espace de Banach-Colmez.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, posons

$$H_{M,k}(V)=\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V,X^k_{\mathrm{st}}(M)),\quad H_{C,k}(V)=\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V,L\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_k).$$

Alors $H_{M,k}(V)$ est un L-espace de dimension finie, et $H_{C,k}(V)=(\mathrm{B}_k\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ est un L-module de type fini.

Proposition 11.9. — *Le diagramme suivant de G-espaces de Fréchet est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & H_{C,b}(V(-a))\bigotimes_L \mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}[M,a,b]) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H_{M,b-a}(V(-a))\bigotimes_L \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{C,b}(V(-a))\bigotimes_L \mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] & H_{C,b}(V(-a))\bigotimes_L \omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] \arrow[r] & H_{C,b}(V(-a))\bigotimes_L M_{\mathrm{dR}}\bigotimes_L \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les lignes sont exactes et l'image des flèches verticales est fermée.

Démonstration. — On doit montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V,\ \cdot\ )\cong(\ \cdot\ \otimes_L V^*)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ conserve l'exactitude des lignes du diagramme 11.8. L'application naturelle

$$\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\otimes_L V^*\big)\to\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\otimes_L V^*\big)$$

est injective puisqu'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\otimes_L V^*\big)&\cong\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*\big)\widehat{\otimes}_L\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M],\\ \mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\otimes_L V^*\big)&\cong\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*\big)\widehat{\otimes}_L\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M],\end{aligned}$$

car l'application $\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]$ est injective. Ceci justifie l'exactitude de la ligne du bas. Par la commutativité du diagramme 11.8 on en déduit que l'application

$$\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\otimes_L V^*\big)\to\mathrm{H}^1\big(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\,;\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}[M,a,b]\otimes_L V^*\big),$$

est injective. $\square$

La ligne du bas du diagramme du corollaire 11.8 nous donne

$$0\to t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to(t^a\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\to 0.$$

Si on tord par t^{-a} et que l'on prend les points fixes sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ on obtient la suite exacte

$$0\to\mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\xrightarrow{(u^+)^{b-a}}\omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to M_{\mathrm{dR}}\otimes_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\to 0$$

de L-représentations de G. On définit la représentation $W^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ de G en considérant l'image inverse de $\mathcal{L}\otimes_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M$ dans $\omega^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]$ ce qui fournit une suite exacte

$$0\to\mathcal{O}^\infty_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to W^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\to\mathcal{L}\otimes_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\to 0.$$

Soit $\mathcal{L}^\perp\subset M^*_{\mathrm{dR}}$ l'orthogonal de $\mathcal{L}\subset M_{\mathrm{dR}}$ pour l'accouplement $M_{\mathrm{dR}}\otimes_L M^*_{\mathrm{dR}}\to L$ et $\mathcal{L}^{-1}:=M^*_{\mathrm{dR}}/\mathcal{L}^\perp$. Alors on a un isomorphisme canonique $\mathcal{L}^{-1}\otimes_L\mathcal{L}\cong L$.

Proposition 11.10. — *On a un isomorphisme*

$$W^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\cong\big({}^{\mathrm{lan}}\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\big)'.$$

Démonstration. — Ceci découle de la proposition 11.6. $\square$

Proposition 11.11. — *On a un isomorphisme*

$$W^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\cong\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}[M,a,b]\big).$$

Démonstration. — Notons H_M pour $H_{M,k}(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}})$, H_C pour $H_{C,k}(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}})$. D'après ce qui précède, H_M est un L-module de rang 1. On a une inclusion $\iota\colon H_M\hookrightarrow M_{\mathrm{dR}}\otimes_L H_C$ qui induit par dualité $\iota^*\colon M^*_{\mathrm{dR}}\otimes H_M\to H_C$. Le noyau de cette application contient $\mathcal{L}^\perp\otimes_L H_M$. Comme M^*_{dR} est de rang 2 et H_C est un L-module de rang 1 on en déduit que le noyau de ι^* est $\mathcal{L}^\perp\otimes H_M$ et donc $H_C=\mathcal{L}^{-1}$. On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{-1}\bigotimes_L \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b]\big) & \longrightarrow & \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{-1}\bigotimes_L \mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] & \longrightarrow & \mathcal{L}^{-1}\bigotimes_L W^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}} & \longrightarrow & \mathcal{L}^{-1}\bigotimes_L \mathcal{L}\bigotimes_L \mathrm{LL}^{[a,b]'}_M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ce qui permet de conclure puisque $\mathcal{L}^{-1}\otimes_L \mathcal{L}\cong L$. □

11.4.2. *Multiplicité des $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ dans la cohomologie proétale*

Proposition 11.12. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$ et $n\geqslant 0$ un entier. Soit Π une L-représentation unitaire de G que l'on suppose supercuspidale. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big)=\begin{cases} V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\otimes_L \mathrm{JL}^{[a,b]}_M & \textit{si } \Pi=\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}} \textit{ et } M \textit{ de niveau} \leqslant n,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — On a montré l'existence d'un diagramme de G-Fréchet, pour M supercuspidal

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b] & \longrightarrow & t^aX^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] & \to & t^a\mathrm{B}_b\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M] & \to & (t^a\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M & \to & 0
\end{array}$$

On en déduit la suite exacte

$$0\to\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b](-a)\to\mathrm{B}_{b-a}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\to\frac{(\mathrm{B}_{b-a}\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})}{X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\to 0.$$

On applique $\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\ \cdot\ \big)$ à cette suite exacte pour obtenir

$$\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b](-a)\big)=$$

$$\mathrm{Ker}\,\Big(\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{B}_{b-a}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big)\to\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\frac{(\mathrm{B}_{b-a}\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})}{X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\big)\Big)=$$

$$\mathrm{Ker}\,\Big(\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_{b-a}\to\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\big)\widehat{\otimes}_L\frac{(\mathrm{B}_{b-a}\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})}{X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)}\Big).$$

Or, on sait que

$$\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\omega^n_{\mathrm{Dr}}[a,b][M]\big)=\begin{cases}\mathcal{L} & \text{si } \Pi=\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, on peut supposer que $\Pi=\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$. Dans ce cas, $\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{LL}^{[a,b]'}_M\big)$ est de dimension 1, ce qui donne

$$\mathrm{Hom}_G\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M,a,b](-a)\big)=\mathrm{Ker}\left(\mathcal{L}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_{b-a}\to\frac{(\mathrm{B}_{b-a}\otimes_{\mathbb{Q}_p}M_{\mathrm{dR}})}{X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)}\right)$$

$$=X^{b-a}_{\mathrm{st}}(M)\cap(\mathcal{L}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_{b-a})=V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}(-a).$$

□

Cette proposition couplée au corollaire 10.11 nous donne le corollaire suivant :

Corollaire 11.13. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$ et $k=a+b-1$. Soit Π une L-représentation de G que l'on suppose supercuspidale. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr},k}(1)\big)\big)=\begin{cases} V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\otimes_L \mathrm{JL}^{[a,b]}_M & \textit{si } \Pi=\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}} \textit{ et } M \textit{ de niveau} \leqslant n,\\ 0 & \textit{si } \Pi \textit{ n'est pas de cette forme.}\end{cases}$$

12. Le cas spécial

12.1. La série spéciale p-adique

Dans cette sous-section on fait quelques rappels sur la série spéciale. Soit $k \geqslant 0$ un entier, supposons que $\sqrt{p} \in L$ si k est pair. On note $\mathrm{Sp}_L(k+1)$ le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module défini par $\mathrm{Sp}_L(k+1) = Le_0 \oplus Le_1$ avec $\varphi(e_0) = p^{-\frac{k+2}{2}} e_0$ et $\varphi(e_1) = p^{-\frac{k}{2}} e_1$, muni de la monodromie $Ne_1 = e_0$ et $Ne_0 = 0$ et l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est triviale. Pour $\mathcal{L} \in L$, $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$, on note $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]} := V_{\mathrm{Sp}_L(a+b),\mathcal{L}}^{[a,b]}$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ définie par

$$V_{\mathcal{L}}^{[a,b]} := \mathrm{Ker}\left(X_{\mathrm{st}}^{a+b}(\mathrm{Sp}_L(a+b)) \to \frac{(\mathrm{Sp}_L(a+b)) \otimes \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)}{((e_0 - \mathcal{L}e_1) \otimes t^a \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{Sp}_L(a+b) \otimes t^b \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)} \right).$$

D'après [**18**], c'est une L-représentation semi-stable de dimension 2, à poids de Hodge-Tate (a, b) telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}) = \mathrm{Sp}_L(a+b)$. La filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right)$ est donnée par

$$\mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right) = \begin{cases} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right) & \text{si } i \leqslant -b-1, \\ L(e_0 - \mathcal{L}e_1) & \text{si } -b \leqslant i \leqslant -a, \\ 0 & \text{si } -a+1 \leqslant i. \end{cases}$$

Rappelons que, si $b \neq a+1$, la représentation $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ est irréductible.

Côté représentations de G, on note $\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]} = \mathbf{\Pi}(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]})$ la représentation unitaire de G associée à $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ par la correspondance de Langlands p-adique.

12.2. Cohomologie de de Rham

On va maintenant décrire les cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato en niveau zéro. La difficulté est que côté automorphe, on doit calculer un entrelacement dérivé. Cette difficulté apparaît déjà dans les travaux de Schraen, dont on va expliquer et reformuler légèrement le résultat [**46**]. Notons $\mathscr{D}(G, L)$ l'algèbre des distributions localement analytiques sur G à valeurs dans L. On travaillera dans la catégorie dérivée des modules sur $\mathscr{D}(G, L)$ de caractère central fixé et on note **Hom** les homomorphismes dans cette catégorie : c'est en particulier le H^0 du bifoncteur dérivé RHom. De même, on note $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}$ le groupe des extensions dans la catégorie des $\mathscr{D}(G, L)$-modules à caractère central fixé.

Proposition 12.1. — *L'isomorphisme de Hyodo-Kato*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b} \cong \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b}$$

munit le complexe de de Rham d'une structure de φ-module filtré et on a un isomorphisme de φ-modules filtrés

$$\mathbf{Hom}\left(({}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'[-1]\,,\, \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{W}_{a,b}\right) \cong \mathbf{D}_{\mathrm{st}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right).$$

Pour commencer, expliquons le résultat de Schraen qui s'obtient en remplaçant ${}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ par $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$, dont on a parlé précédemment, mais aussi ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ par $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$. L'isomorphisme signifie que le terme de gauche est isomorphe à un complexe concentré en degré 0, qui est le (φ, N)-module filtré associé à la représentation galoisienne $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ que l'on a explicité plus haut. Le (φ, N)-module sous-jacent n'est autre que $\mathrm{Sp}_L(a+b)$ et la filtration est définie par $\mathcal{L}$. Sur le membre de gauche, la filtration est définie par la filtration sur le complexe de de Rham et les autres structures sont explicités dans la proposition.

12.2.1. *Rappels du résultat de Schraen.* — Dans ce paragraphe, on explique le résultat principal de [**46**], mais en tordant par une puissance du déterminant ce qui ne change rien à l'argument.

Proposition 12.2. — *On a un isomorphisme de φ-modules filtrés*

$$\mathbf{Hom}\left((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}\right)\cong\mathbf{D}_{\mathrm{st}}\left(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\right).$$

On commence par rappeler plusieurs résultats préliminaires démontrés dans [**46**] :

Lemme 12.3. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$, alors*

- $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 1,
- $\mathrm{Hom}_{L[\bar{G}]}\big(\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\,,\,\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 1,
- *l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(\mathbf{1}\,,\,\mathrm{St}^{\infty}_{\mathbb{Q}_p}\big)\to\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)$, *où les extensions sont considérées dans la catégorie des L-représentations localement algébriques de G, est un isomorphisme,*
- *l'image de l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)\to\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)\cong\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Q}_p^{\times}\,,\,L\big)$ *est la L-droite engendrée par v_p.*

Démonstration. — Le premier point est le contenu de [**46**, Corollaire 4.11].

Le second point provient de la description des composantes de Jordan-Hölder de $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$.

Le troisième point est le contenu de [**46**, Proposition 4.14].

Le dernier point est le contenu de [**46**, Corollaire 4.16]. □

On explique maintenant la preuve de la proposition 12.2 en suivant la démonstration de [**46**, Théorème 5.3].

Démonstration. — Le complexe de de Rham de $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$ se scinde et s'écrit $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\cong\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\oplus\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})[-1]$. Or $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\cong\mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\cong(\mathrm{St}^{\infty}_{\mathbb{Q}_p})'$. Ainsi, il est naturel de définir le complexe de L-représentations localement algébriques

$$\mathcal{H}_0^{[a,b]}(L)=W_{a,b}(L)\oplus\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}[-1],$$

qui est isomorphe à $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W_{a,b}(L)$. Ainsi, on obtient que

$$D\coloneqq\mathbf{Hom}\left((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'[-1]\,,\,\mathcal{H}_0^{[a,b]}\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\right)=D_0\oplus D_1,$$

où

- $D_0=\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'\,,\,W_{a,b}(L)\big)\cong\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W_{a,b}(L)\,,\,\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)$ qui est un L-espace vectoriel de dimension 1 d'après le lemme 12.3,
- $D_1=\mathrm{Hom}_{L[\bar{G}]}\big((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'\,,\,(\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b})'\big)\cong\mathrm{Hom}_{L[\bar{G}]}\big(\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\,,\,\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)$ qui est un L-espace vectoriel de dimension 1 d'après le lemme 12.3.

On munit D d'une structure de φ-module en posant $\varphi\coloneqq p^{-\frac{a+b-1}{2}}$ sur D_0 et $\varphi\coloneqq p^{-\frac{a+b+1}{2}}$ sur D_1.

Schraen munit alors D d'une structure de (φ,N)-module en définissant un opérateur $N\colon D_1\to D_0$ que l'on va expliciter. Soit $f\in D_1$ non nul que l'on voit comme une application L-linéaire non nulle $f\colon\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\to\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$. Alors $N(f)$ est l'image de $-\frac{1}{2}v_p$ par l'application induite par f

$$\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}(L)\big)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W^*_{a,b}(L)\,,\,(\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'\big).$$

D'après le dernier point du lemme 12.3 $N(f)\neq 0$, ce qui finit la démonstration que $D\cong\mathrm{Sp}_L(a+b)$.

Le dernier point à éclaircir est la filtration. On définit une filtration sur $\mathcal{H}^{[a,b]}(L)$ par

$$\mathrm{Fil}^i\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W_{a,b}(L)=\begin{cases}\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}W_{a,b}(L) & \text{si } i\leqslant -b-1,\\ 0\to\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] & \text{si } -b\leqslant i\leqslant -a,\\ 0 & \text{si } i\geqslant -a+1.\end{cases}$$

Ainsi, pour i un entier tel que $-b\leqslant i\leqslant -a$, on obtient

$$\mathrm{RHom}\big((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'[-1]\,,\,\mathrm{Fil}^i\mathcal{H}_0(k)\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)\cong\mathrm{Hom}_{L[\bar{G}]}\big((\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]})'\,,\,(\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_{a,b})'\big).$$

D'après le lemme 12.3, cet entrelacement est un L-espace vectoriel de dimension 1. Notons $L\cdot v\subset D$ l'image de cette L-droite dans D. On écrit l'image de v comme v_0+v_1 avec $v_i\in D_i$. Alors l'élément v_1 est donné par la flèche duale

$$-2j'\colon \big(\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'\to\big(\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)',$$

où j est l'inclusion naturelle $j\colon \mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\to\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$. Schraen montre alors que $N(v_1)$ est l'élément v_p. Pour v_0, il s'agit de l'image du cocycle $-\log_0$ par la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W_{a,b}^*(L)\,,\,\mathrm{St}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)\to\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(W_{a,b}^*(L)\,,\,\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big).$$

Or, dans ce dernier espace on a $-\log_0=\mathcal{L}v_p$ et donc $v=v_1+\mathcal{L}N(v_1)$ dans D, ce qui conclut que la filtration est bien celle de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]})$. □

12.2.2. *Preuve de la proposition 12.1.* — Premièrement, remarquons que la version unitaire de la proposition 12.2 s'obtient en tordant les représentations par la bonne puissance de la norme. Pour résumer, il faut justifier deux choses pour obtenir la proposition 12.1 à partir de la proposition12.2. On doit montrer :

1. que l'on obtient bien le (φ,N)-module $\mathrm{Sp}_L(a+b)$ lorsqu'on calcule l'entrelacement avec la cohomologie de Hyodo-Kato de ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}$,
2. que l'on obtient le même résultat en remplaçant $\Sigma_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ par ${}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$.

Pour le premier point on veut montrer que

$$\mathbf{Hom}\,\big(\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}\big)\cong\mathrm{Sp}_L(a+b).$$

Mais l'isomorphisme de Hyodo-Kato nous assure dans ce cas que le complexe de Hyodo-Kato est scindé et donc on a un isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\cong\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\oplus\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})[-1]$. Montrons que les Frobenius coïncident. D'après [**35**, Theorem 6.3], $\varphi=1$ sur $\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$ et $\varphi=p$ sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$. Comme sur $\breve{\mathbf{D}}_k$, pour $k=a+b-1$ on a $\varphi^2=p^{-k}$, on en déduit que sur $\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\breve{\mathbf{D}}_k(1)$ on a $\varphi^2=p^{-k+1}$ et sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\breve{\mathbf{D}}_k(1)$ on a $\varphi^2=p^{-k}$. Finalement, il vient que sur le complexe de Hyodo-Kato isotrivial $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}$, associé à $\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}$, on a $\varphi=p^{-\frac{a+b+1}{2}}$ sur $\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}$ et $\varphi=p^{-\frac{a+b-1}{2}}$ sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}$.

Il reste à montrer que la monodromie n'est pas nulle. La monodromie nous donne un endomorphisme de complexes $N\colon\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\to\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})$. Cet endomorphisme est G-équivariant et la relation $N\varphi=p\varphi N$ et les valeurs du Frobenius nous assurent que N est une flèche de dégré 1, i.e. $N\in\mathrm{Ext}^1_{\breve{\mathbb{Q}}_p[\bar{G}]}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\,,\,\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\big)$. Pour justifier que N n'est pas nul, il suffit de choisir un sous-groupe de Schottky cocompact $\Gamma\subset\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de considérer $X_\Gamma\coloneqq\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p}/\Gamma$, qui est une courbe compacte, naturellement munie d'un modèle à réduction semi-stable. On sait d'après [**22**] que $N_\Gamma\colon\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_\Gamma)\to\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(X_\Gamma)$ n'est pas nul. De plus, on a un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{R}\Gamma\big(\Gamma\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\big)\cong\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_\Gamma).$$

Mais la fonctorialité de la cohomologie de Hyodo-Kato nous dit que l'opérateur de monodromie $N_\Gamma\colon\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_\Gamma)\to\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_\Gamma)$ est induit par l'opérateur de monodromie N ; en particulier si N était nul, N_Γ serait nul, ce qui n'est pas le cas. Puisque $\mathrm{Ext}^1_{\breve{\mathbb{Q}}_p[\bar{G}]}\big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\,,\,\mathrm{H}^0_{\mathrm{HK}}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\big)\cong\mathrm{Ext}^1_{\breve{\mathbb{Q}}_p[\bar{G}]}\big(\mathbf{1}\,,\,\mathrm{St}^\infty_{\breve{\mathbb{Q}}_p}\big)$ on remarque d'après le lemme 12.3 que cette classe est donnée par la valuation p-adique v_p, ce qui est en accord avec ce qui se passe dans la preuve de Schraen. Ceci permet de conclure que les (φ,N)-modules sont isomorphes.

Pour le second point, on utilise la suite exacte

$$0\to\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\to{}^{\mathrm{lan}}\Pi_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\to\underline{\widetilde{B}}_{b,a}\to 0.$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\mathbf{Hom}\,\big((\underline{\widetilde{B}}_{b,a})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},\mathbb{Q}_p})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{W}_{a,b}\big)\cong 0.$$

Mais puisque le complexe de de Rham est scindé, on écrit cet entrelacement dérivé comme la somme directe
$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\,,\,\widetilde{\underline{B}}_{b,a}\big)\oplus \mathrm{Ext}^1_{L[\check{G}]}\big(\underline{W}^*_{a,b}\,,\,\widetilde{\underline{B}}_{b,a}\big),$$
où on rappelle que les entrelacements et extensions sont considérés dans la catégorie des L-représentations localement analytiques à caractère central fixé. Le terme de droite, le groupe des extensions, est nul d'après le lemme 8.9. Il est clair que le terme de gauche est nul.

Ceci achève la démonstration de la proposition 12.1.

□

12.3. Entrelacements automorphes

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 12.4. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0<a+1<b$. Soit Π une L-représentation de Banach unitaire, admissible et absolument irréductible de G. Alors, en tant que L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times\check{G}$ on a*
$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)\cong\begin{cases}V^{[a,b]}_{\mathcal{L}} & \text{si } \Pi=\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}},\\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas de cette forme.}\end{cases}$$

On déduit alors directement du corollaire 10.11 le corollaire suivant :

Corollaire 12.5. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0<a+1<b$. Soit Π une L-représentation de Banach unitaire, admissible et absolument irréductible de G. Alors*
$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)\cong\begin{cases}V^{[a,b]}_{\mathcal{L}} & \text{si } \Pi=\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}},\\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas de cette forme.}\end{cases}$$

Remarque 12.6. — Dans le cas où $b=a+1$, le théorème et son corollaire ne tiennent plus. Dans ce cas, la cohomologie (pro)étale est le dual d'une représentation de Steinberg irréductible et l'entrelacement est non nul si et seulement si Π, supposée absolument irréductible, est la Steinberg en question. L'entrelacement, lorsqu'il n'est pas nul, est la représentation $L(a)$. Pour obtenir un résultat ayant un lien avec la correspondance de Langlands p-adique, il faut d'une part considérer des représentations indécomposables, puisque les représentations spéciales de poids $(a,a+1)$ sont réductibles et, d'autre part, remplacer le premier groupe de cohomologie par le complexe tout entier en prenant un Hom dérivé. Le phénomène qui se produit ici est que les deux morceaux de la représentation sont répartis entre le H^0 et le H^1 ; c'est ce que l'on précisera dans la proposition 12.11.

Comme les notations sont un peu lourdes, on les allègera dans les preuves en introduisant
$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{p\acute{e}t}}[a,b]\coloneqq\mathrm{H}^i_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big),$$

12.3.1. *Réduction de l'entrelacement dérivé.* — On commence par un lemme pour montrer qu'on peut se ramener au calcul dans la catégorie dérivée. L'argument repose sur le calcul des $\mathrm{H}^i_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ qui sont tous nuls sauf si $i=1$, ainsi l'entrelacement dérivé se réduit à l'entrelacement avec le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}$ puisque la suite spectrale sous-jacente dégénère dès la seconde page.

Lemme 12.7. — *Soient $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0<a+1<b$ et soit Π une L-représentation de Banach unitaire, admissible, absolument irréductible de G. Alors*
$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)=\mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R\Gamma}_{\mathrm{p\acute{e}t}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big),$$
où **Hom** *désigne les morphismes dans la catégorie dérivée des $\mathscr{D}(G,L)$-modules de caractère central fixé.*

Remarque 12.8. — Dans le cas où $b=a+1$, le H^0 n'est pas nul et ce résultat est faux. La magie dans le cas des coefficients non-triviaux est que toute l'information du complexe proétale est contenue dans le premier groupe de cohomologie.

Démonstration. — Pour simplifier les notations, notons $\mathrm{H}^i_{\text{pét}} := \mathrm{H}^i_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ et $\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}} := \mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$. On a une suite spectrale qui calcule le terme de droite

$$E_2^{i,j}\colon \mathrm{Ext}^{j+1}_{L[\check{G}]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^i_{\text{pét}}\big) \implies \mathrm{H}^{i+j}\mathrm{RHom}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big).$$

Or, puisque $\mathrm{H}^i_{\text{pét}} = 0$ si $i \neq 0$ d'après 10.6, cette suite spectrale est concentrée sur la ligne $i = 1$ et dégénère dès la seconde page. On en déduit le résultat, puisque le seul terme qui contribue au H^0 à droite est $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big)$. □

12.3.2. *Le cas* $\Pi = \Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$. — À partir de la définition de la cohomologie syntomique et de l'isomorphisme de comparaison, on déduit de la proposition 12.1 la proposition suivante. En combinant cette proposition au lemme précédent, on obtient la première partie du théorème 12.4.

Théorème 12.9. — *Soient* $a, b \in \mathbb{N}$ *tels que* $0 \leqslant a < b$, *alors*

$$\mathbf{Hom}\,\big(({}^{\mathrm{lan}}\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}.$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, on note $\Pi = \Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ et $\mathrm{R}\Gamma_?$ le complexe de cohomologie isotrivial de ${}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}$ à coefficients dans $\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)$ pour $? \in \{\mathrm{dR}, \text{pét}, \mathrm{syn}, \mathrm{HK}\}$. On commence par calculer l'entrelacement dans la cohomologie syntomique et on rappelle que par définition on a un triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}} \to \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\big)^{\varphi=p} \to \big(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)/\mathrm{Fil}^1.$$

On étend les scalaires de cette suite à L puis on applique $\mathrm{RHom}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\cdot\big)$. D'après la proposition 12.1 on a

$$\mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}\big) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}),$$
$$\mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}\big) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}).$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big) \to X^1_{\mathrm{st}}\left(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}})\right) \to X^+_{\mathrm{dR}}\left(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}})\right)/\mathrm{Fil}^1.$$

Or, la dernière flèche provient de l'inclusion naturelle $X^1_{\mathrm{st}}\left(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}})\right) \hookrightarrow X^+_{\mathrm{dR}}\left(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^{[a,b]}_{\mathcal{L}})\right)$. Ainsi, la définition de $V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ assure que

$$\mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big) \cong V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}.$$

Mais la suite spectrale $E_2^{i,j}$ qui calcule le terme de gauche est nulle en dehors des lignes $i = 0, 1$ en vertue du corollaire 10.6. Finalement, le théorème 6.1 nous donne un isomorphisme

$$\mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}\big) \cong \mathbf{Hom}\,\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\text{pét}}\big),$$

ce qui achève la preuve. □

12.3.3. *Exclusivité.* — On montre maintenant la seconde partie du théorème.

Proposition 12.10. — *Soient* $a, b \in \mathbb{N}$ *tels que* $0 < a + 1 < b$. *Soit* Π *une* L*-représentation de Banach unitaire admissible absolument irréductible de* G. *Si* Π *n'est pas de la forme* $\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$, *alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = 0.$$

Démonstration. — On utilise le diagramme fondamental dans le cas spécial qui nous assure qu'on a un plongement fermé

$$\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a, b] \hookrightarrow \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a, b].$$

De plus, la dualité de Morita assure que $\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a, b] \cong \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)'$ et donc on obtient un plongement fermé

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a, b]\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big). \tag{12.1}$$

Montrons que si $\Pi^{\mathrm{lalg}} = 0$, alors $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) = 0$. Puisqu'on a la suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b} \to \underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b} \xrightarrow{(u^+)^{b-a}} \underline{B}_{b,a} \to 0,$$

et que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) = \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\,,\,\Pi^{\mathrm{lalg}}\big) = 0$, on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}(L)\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) \cong \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{B}_{b,a}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big).$$

Il faut justifier que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{B}_{b,a}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) = 0$. Soit $\underline{B}_{b,a} \to \Pi^{\mathrm{lan}}$ une application L-linéaire, continue et G-équivariante. Par la propriété universelle du complété unitaire universel, la composée $\underline{B}_{b,a} \to \Pi^{\mathrm{lan}} \hookrightarrow \Pi$ se factorise à travers le complété unitaire universel de $\underline{B}_{b,a}$. Or, ce complété est nul d'après le critère donné par [**25**, Lemma 2.1] et donc la flèche initiale $\underline{B}_{b,a} \to \Pi^{\mathrm{lan}}$ est nulle.

Supposons que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big((\Pi^{\mathrm{lan}})'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}[a,b]\big) \neq 0$. On a montré que $\Pi^{\mathrm{lalg}} \neq 0$, ce qui signifie que le socle de Π^{lan} est contenu dans Π^{lalg}. On déduit de l'injection (12.1) que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) \neq 0$. Soit $f\colon \underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b} \to \Pi^{\mathrm{lan}}$ une application non nulle. Le socle de $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}$ est $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}$ mais comme $f \neq 0$ et $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\underline{B}_{b,a}\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) = 0$, cette application se restreint en une application non nulle $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b} \to \Pi^{\mathrm{lan}}$ qui est injective puisque $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}$ est irréductible. Cette application induit, en composant avec l'injection $\Pi^{\mathrm{lan}} \hookrightarrow \Pi$, une injection $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b} \hookrightarrow \Pi$. Mais d'après [**17**, Theorem 1.3], les complétés unitaires admissibles absolument irréductibles de $\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}$ sont les $\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ et on en déduit qu'il existe un $\mathcal{L} \in L$ tel que $\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}} \cong \Pi$.

□

12.3.4. *Le cas réductible.* — Dans le cas où $b = a+1$ les représentations $V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ et $\Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ sont réductibles et le théorème 12.4 et son corollaire tombent en défaut sous cette forme. En effet, comme $\mathrm{H}^0_{\mathrm{pét}}[a,b] \neq 0$ dans ce cas, les arguments du paragraphe 12.3.1 tombent en défaut. Néanmoins, à partir de la proposition 12.9, on peut toutefois calculer la multiplicité d'une représentation indécomposable de G dans le complexe de cohomologie étale et obtenir le résultat attendu. On n'obtient qu'une exclusivité partielle que l'on énonce à l'aide de la théorie des blocs de Paskunas (cf. [**40**]).

Proposition 12.11. — *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant a < b$. Soit Π une L-représentation indécomposable de longueur finie de G, alors*

$$\mathbf{Hom}\big(\Pi'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ét}}\big({}^{p}\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = \begin{cases} V^{[a,b]}_{\mathcal{L}} & \text{si } \Pi \text{ est de la forme } \Pi^{[a,b]}_{\mathcal{L}}, \\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas dans le bloc de la Steinberg.} \end{cases}$$

Démonstration. — On a démontré ce résultat dans le cas où $b \neq a+1$ donc on peut supposer $b = a+1$ et même $a = 0$ quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique ce qui revient à travailler à coefficients constants. Notons simplement $\mathrm{H}^i_{\mathrm{ét}} = \mathrm{H}^i_{\mathrm{ét}}[0,1]$, alors la suite spectrale

$$E_2^{i,j}\colon \mathrm{Ext}^{j+1}_{L[\check{G}]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^i_{\mathrm{ét}}\big) \implies \mathrm{H}^{i+j}\mathrm{RHom}\big(\Pi'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ét}}\big)$$

nous donne la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{L[\check{G}]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^0_{\mathrm{ét}}\big) \to \mathbf{Hom}\,\big(\Pi'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ét}}\big) \to \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{ét}}\big) \to 0,$$

où $\mathbf{H}_{\mathrm{ét}} := \mathbf{Hom}\,\big(\Pi'[-1]\,,\,\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{ét}}\big)$. Puisque $\mathrm{H}^0_{\mathrm{ét}} \cong L(1)$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ét}} \cong \big(\mathrm{St}^0_L\big)'$, la suite exacte ci-dessus s'écrit

$$0 \to \mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi\big)(1) \to \mathbf{H}_{\mathrm{ét}} \to \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}^0_L\,,\,\Pi\big) \to 0.$$

- Si Π n'est pas dans le bloc de la Steinberg, alors $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}^0_L\,,\,\Pi\big) = 0$ et comme la représentation triviale est aussi dans ce bloc, on obtient $\mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi\big) = 0$. Ainsi $\mathbf{H}_{\mathrm{ét}} = 0$ dans ce cas.

- Supposons maintenant que $\Pi = \Pi_{\mathcal{L}}^{[0,1]}$ pour $\mathcal{L} \in L$. On obtient la même suite exacte que précédemment pour la cohomologie proétale :

$$0 \to \mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big)(1) \to \mathbf{H}_{\mathrm{pét}} \to \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\Pi^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big) \to 0.$$

Montrons que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\Pi^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big) \cong \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^\infty\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big)$. On a une flèche naturelle, qui provient de la suite exacte pour $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}$,

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\Pi^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big) \to \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^\infty\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big).$$

Pour montrer que cette flèche est un isomorphisme on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\Pi'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t}}\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^0\,,\,\Pi\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\Pi^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{pét}}\big) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^\infty\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big)
\end{tikzcd}$$

La flèche horizontale en haut est un isomorphisme, puisque $\mathrm{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t}} \cong \big(\mathrm{St}_L^0\big)'$. Comme St_L^0 est le complété unitaire universel de St_L^∞ et Π celui de Π^{lan} d'après [**13**], la flèche verticale de droite est un isomorphisme. Finalement, d'après le corollaire 10.11, la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. On en déduit que la flèche horizontale en bas est un isomorphisme, comme on voulait.

D'après le théorème 12.9, on sait que $\mathbf{H}_{\mathrm{pét}} \cong V_{\mathcal{L}}^{[0,1]}$ et on obtient un diagramme commutatif, $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi\big)(1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{H}_{\mathrm{\acute{e}t}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^0\,,\,\Pi\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big)(1) \arrow[r] & V_{\mathcal{L}}^{[0,1]} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^\infty\,,\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour justifier que la flèche verticale de gauche est bien injective, il faut montrer qu'une extension de L par Π, qui se scinde lorsqu'on prend les vecteurs localement analytiques, est scindée. Supposons que $\mathbf{E}$ est une L-représentation de Banach unitaire de G, extension de L par Π :

$$0 \to \Pi \to \mathbf{E} \to L \to 0.$$

Supposons que cette extension se scinde lorsqu'on prend les vecteurs localement analytiques, i.e. $\mathbf{E}^{\mathrm{lan}} \cong \Pi^{\mathrm{lan}} \oplus L$. On prend maintenant le complété unitaire universel pour obtenir $\mathbf{E} \cong \Pi \oplus L$ (cf. [**13**]), c'est-à-dire que l'extension initiale était scindée.

De plus, notons que $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\mathrm{St}_L^\infty\,,\,\Pi\big)$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 et donc $\mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi^{\mathrm{lan}}\big)$ est un L-espace vectoriel de dimension 1. Mais à partir du diagramme, on obtient de plus que $\mathrm{H}^1\big(G\,;\,\Pi\big)$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 puisque s'il était nul, on obtiendrait une injection $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariante $L \hookrightarrow V_{\mathcal{L}}^{[0,1]}$ ce qui est impossible. Les flèches verticales dans le diagramme ci-dessus sont donc des isomorphismes et on a bien démontré que $\mathbf{H}_{\mathrm{\acute{e}t}} \cong V_{\mathcal{L}}^{[0,1]}$.

$\square$

Remarque 12.12. — En utilisant le résultat principal de [**32**], on peut préciser les cas d'annulation dans le bloc de la Steinberg.

12.4. Entrelacement des $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$

12.4.1. *Le diagramme fondamental.* — On commence par rappeler la forme que prend le diagramme dans ce cas. Rappelons que $\mathrm{JL}(\mathrm{Sp}(k))$ est une L-représentation de dimension 1, donnée par la norme réduite et donc que $\mathrm{JL}^{[a,b]}_{\mathrm{Sp}(a+b)} \cong \check{W}_{a,b}(L)$. On note en particulier

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] &\coloneqq \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}\{a-b+1, 1-a\} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot |\det|^{\frac{1-a-b}{2}},\\ \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] &\coloneqq \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}\{b-a+1, 1-b\} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot |\det|^{\frac{1-a-b}{2}},\\ \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b] &\coloneqq \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\underline{\check{W}}_{a,b}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big(\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\, \mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big),\end{aligned}$$

où la norme est considérée comme un caractère à valeurs dans L. Rappelons qu'on a de plus l'isomorphisme de Morita $\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] \cong \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lan}}_{a,b}\big)'$. La proposition est la suivante, elle découle directement du théorème 9.7.

Proposition 12.13. — *Soit $k+1 = a+b$. On a un diagramme commutatif, $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times G$-équivariant d'espaces de Fréchet dont les lignes sont exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{W}_{a,b}\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} t^a\mathrm{U}_{b,2} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a\mathrm{B}_b \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)'\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_{p^2}} t^a\mathrm{U}_{b-1,2} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0\\
0 \arrow[r] & \underline{W}_{a,b}\otimes_{\mathbb{Q}_p} t^a\mathrm{B}_b \arrow[r] & \mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a\mathrm{B}_b \arrow[r] & \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a\mathrm{B}_b \arrow[r] & \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)'\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} t^a\mathrm{B}_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont toutes des injections d'images fermés.

12.4.2. *Rappels sur les presque-C-représentations.* — Pour calculer la multiplicité d'un $V^{[a,b]}_{\mathcal{L}}$ dans la cohomologie proétale on va devoir calculer l'entrelacement de ces représentations avec les espaces de Banach-Colmez qui apparaissent dans le diagramme ci-dessus. Pour ce faire, on va considérer les espaces comme des presque-C-représentations et utiliser les résultats de [**29**] que l'on rappelle brièvement. On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ la catégorie des presque-C-représentations. Si X est une presque-C-représentation, on lui associe sa dimension principale $d(X) \in \mathbb{N}$ et sa hauteur $h(X) \in \mathbb{Z}$. Alors, si X et Y sont des presque-C-représentations, les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $n \geqslant 3$, et pour $i = 0,1,2$, on a une dualité parfaite

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{2-i}_{\mathcal{C}}(Y, X(1)) \to \mathbb{Q}_p,$$

où $X(1)$ est le tordue de X par le caractère cyclotomique. De plus, on a une formule d'Euler-Poincaré qui s'écrit $\chi(X,Y) = -h(X)h(Y)$ où

$$\chi(X,Y) \coloneqq \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Par exemple, $t^a\mathrm{U}_{b,2}$ est une presque-C-représentation de hauteur 2 et de dimension principale b et $t^a\mathrm{B}_b$ est une presque-C-représentation de hauteur 0 et de dimension principale b. On note $\mathcal{C}^+$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ des presque-C-représentations effectives ; rappelons que $t^a\mathrm{U}_{b,2}$ est une presque-C-représentation effective

On peut réinterpréter les presque-C-représentations en termes de fibrés sur la courbe $\mathcal{X}_{\mathrm{FF}} = \mathcal{X}_{\mathrm{FF},C}$. Notons $\mathcal{M}$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{FF}} \coloneqq \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{FF}}}$-modules cohérents $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariants sur la courbe. Cette catégorie a une théorie des pentes de Harder-Narasimhan et on peut considérer la sous catégorie $\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{M}$ des fibrés effectifs, i.e. ceux qui sont de pentes positives (cf. [**27**]). On rappelle le théorème A de [**30**] sous la forme d'une proposition.

Proposition 12.14. — *Il existe un foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{X}_{\mathrm{FF}})$ de* sections globales*, à valeurs dans $\mathcal{C}$ qui induit une équivalence de catégories $\mathcal{M}^+ \cong \mathcal{C}^+$.*

12.4.3. *Les L-presque-C-représentations.* — Dans le diagramme, ce n'est pas vraiment $t^a\mathrm{U}_{b,2}$ mais plutôt $t^a\mathrm{U}_{b,2}(L) \coloneqq t^a\mathrm{U}_{b,2}\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L$ qui apparaît ; c'est une presque-C-représentation de L-hauteur 1 et de dimension principale $\frac{[L:\,\mathbb{Q}_p]}{2}\cdot b$. De même, on note $t^a\mathrm{U}_{b-1,2}(L) \coloneqq t^a\mathrm{U}_{b-1,2}\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L$ mais aussi $t^a\mathrm{B}_b(L) = t^a\mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ qui est une presque-C-représentation de L-hauteur 0 et de dimension principale $[L\colon \mathbb{Q}_p]\cdot b$. On insiste sur le fait que dans la définition de $t^a\mathrm{B}_b(L)$ et de $t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)$, les produits tensoriels ne sont pas au-dessus du même corps et espérons que ces notations ne portent pas à confusion. En particulier, on a une injection de presque-C-représentations $t^a\mathrm{U}_{b,2}(L) \hookrightarrow t^a\mathrm{B}_{b,2}(L)$ dont le quotient $t^a\mathrm{B}_b(L)/t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)$ est de L-hauteur -1 et de dimension principale $\frac{[L:\mathbb{Q}_p]}{2}\cdot b$ alors que la suite exacte fondamentale pour $t^a\mathrm{U}_{b,2}$ s'écrit

$$0 \to \mathbb{Q}_{p^2}t^a t_2 \to t^a\mathrm{U}_{b,2} \to t^a\mathrm{B}_b \to 0.$$

Pour cela on introduit $\mathcal{C}_L$, la catégorie des L-presque-C-représentations qui sont aussi munies d'une structure de L-espace vectoriel muni d'une L-hauteur h_L et d'une dimension principale d, qui est la même que celle de $\mathcal{C}$. Si X et Y sont des L-presque-C-représentations, les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_L}(X,Y)$ sont des L-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $n \geqslant 3$ et pour $i = 0, 1, 2$, on a une dualité parfaite

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_L}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{2-i}_{\mathcal{C}_L}(Y, X(1)) \to L.$$

De plus, on a une formule d'Euler-Poincaré qui s'écrit $\chi_L(X,Y) = -h_L(X)h_L(Y)$ où

$$\chi_L(X,Y) \coloneqq \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_L \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_L}(X,Y).$$

Tout ceci découle directement des résultats pour $\mathcal{C}$. On commence par rappeler un lemme qui nous servira à démontrer un lemme technique.

Lemme 12.15. — *Soit $V = V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ et $U \in \{t^a\mathrm{U}_{2,b}(L), t^a\mathrm{B}_b, t^a\mathrm{B}_b/t^a\mathrm{U}_{2,b}(L)\}$. Alors*

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}_L}\big(V\,,\,U\big) = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat pour $a = 0$, quitte à tordre par t^a. En utilisant la dualité de Poincaré, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(U\,,\,V\big) = 0$. Commençons par le montrer pour $U = \mathrm{U}_{2,b}$. C'est une presque-C-représentation effective et on utilise la proposition 12.14. On a

$$\mathrm{H}^0\big(\mathcal{X}_{\mathrm{FF}}\,;\,\mathcal{O}\big(\tfrac{b}{2}\big)\big) = \mathrm{U}_{2,b},\ \ \mathrm{H}^0\big(\mathcal{X}_{\mathrm{FF}}\,;\,\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big) = V.$$

Or, comme $\frac{b}{2} > 0$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_{\mathrm{FF}}}\big(\mathcal{O}\big(\tfrac{b}{2}\big)\,,\,\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big) = 0.$$

Ainsi, d'après la proposition 12.14, a fortiori $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{U}_{2,b}\,,\,V\big) = 0$ et de même $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(\mathrm{U}_{2,b}(L)\,,\,V\big) = 0$. Pour $U = \mathrm{B}_b$, comme on a une surjection $\mathrm{U}_{b,2} \to \mathrm{B}_b$ on en déduit une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{B}_b\,,\,V\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{U}_{2,b}\,,\,V\big) = 0,$$

et donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{B}_b\,,\,V\big) = 0$ et de même $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(\mathrm{B}_b(L)\,,\,V\big) = 0$. Finalement, la surjection $\mathrm{B}_b(L) \to \mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{2,b}(L)$ donne l'injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{2,b}(L)\,,\,V\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(\mathrm{B}_b(L)\,,\,V\big) = 0,$$

ce qui démontre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}\big(\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{2,b}(L)\,,\,V\big) = 0$. □

Lemme 12.16. — *Soit $V = V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$. Alors on a*

1. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 0$,
2. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{U}_{b-1,2}(L)\big)$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 1,
3. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{B}_b(L)\big)$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{B}_b(L)\big)$ *sont des L-espaces vectoriels de dimension* 1.
4. $\mathrm{Ext}^1_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)\big)$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 2,
5. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\,t^a\mathrm{B}_b(L)/t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)\big)$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — Dans la preuve, les Hom et Ext sont tous dans la catégorie $\mathcal{C}_L$, que l'on omettra des indices. Supposons que $a = 0$; le cas $a > 0$ s'en déduit directement en tordant par un caractère.

- Rappelons que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V^*) = \mathrm{Sp}_L(b)^* = Le_0^* \oplus Le_1^*$ avec $\varphi(e_0^*) = p^{(b+1)/2}e_0^*$, $\varphi(e_1^*) = p^{(b-1)/2}e_1^*$, $Ne_0^* = e_1^*$ et $Ne_1^* = 0$. De plus, $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+[u]$ avec $Nu = -1$ et $\varphi(u) = p$. On commence par remarquer que, comme V est semi-stable, on a
$$V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cr}} \cong \big(\mathrm{Sp}_L(b)^* \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+\big)^{N=0} = e_1^*\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L) \oplus (e_0^* + ue_1^*)\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L),$$
ce qui donne
$$V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+\big)^{\varphi^2=p^b} \cong \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p^{-1}} \oplus \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p},$$
$$V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+\big)^{\varphi^2=p^{b-1}} \cong \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=1} \oplus \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p^2}.$$
Ceci nous donne les points 1 et 2 puisque $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p^{-1}}$, $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p}$ et $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}(L)\big)^{\varphi^2=p^2}$ n'ont pas d'invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et les invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cr}}^+(L)\big)^{\varphi^2=1}$ sont L.
- Passons au point 3. Comme V est de Rham on a
$$V^* \otimes_L \mathrm{B}_b(L) \cong \mathrm{Fil}^0\big(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*) \otimes_L \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(L)\big)/\mathrm{Fil}^b\big(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*) \otimes_L \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(L)\big).$$
On choisit une base compatible avec la filtration $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*) = Lf_b \oplus Lf_0$, ce qui donne
$$\mathrm{Fil}^0\big(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big) = t^{-b}f_b\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(L) \oplus f_0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(L),$$
$$\mathrm{Fil}^b\big(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big) = f_b\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(L) \oplus t^b f_0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(L).$$
Donc $V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_b \cong f_b t^{-b}\mathrm{B}_b \oplus f_0\mathrm{B}_b$, dont la première composante n'a pas d'invariant sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et la seconde a exactement L comme invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$; ainsi $\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big) = L$. Pour la seconde partie du troisième point on remarque que $\chi_L(V,\mathrm{B}_b) = 0$ mais comme par le lemme 12.15 $\mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big) = 0$ ce qui donne $\dim_L \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big) = \dim_L \mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big) = 1$, ce qui finit la preuve du troisième point.
- Pour le quatrième point, la formule d'Euler-Poincaré donne $\chi_L(V,\mathrm{U}_{b,2}(L)) = -2$. Le lemme 12.15 donne $\mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 0$. Donc $\dim_L \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 2 - \dim_L \mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 2$ en vertu du premier point.
- Le dernier point est plus délicat. La formule d'Euler-Poincaré nous assure que
$$\chi_L(V,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}(L)) = 2$$
et, par le lemme 12.15, $\mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 0$, ce qui donne
$$\dim_L \mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 2 + \dim_L \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}(L)\big).$$
Il reste à montrer $\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) = 0$. On applique $\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\cdot\,\big)$ à la suite exacte courte
$$0 \to \mathrm{U}_{b,2}(L) \to \mathrm{B}_b(L) \to \mathrm{U}_{b,2}(L)/\mathrm{B}_b(L) \to 0,$$
pour obtenir la suite exacte
$$\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) \to \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big) \to \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)/\mathrm{U}_{b,2}\big) \to 0,$$
où le zéro à droite provient de l'annulation de $\mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big)$ donnée par le lemme 12.15. Il suffit de montrer que l'application
$$\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) \to \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big)$$
est surjective. On applique maintenant $\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\cdot\,\big)$ à la suite exacte fondamentale (à laquelle on a appliqué $\cdot\ \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L$)
$$0 \to L\cdot t_2 \to \mathrm{U}_{2,b}(L) \to \mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L \to 0,$$
pour obtenir la suite exacte
$$\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big) \to \mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} L\big) \to \mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,L\cdot t\big).$$

Mais par la dualité $\mathrm{Ext}^2\big(V\,,\,L\cdot t_2\big)\cong\mathrm{Hom}\big(L\cdot t_2\,,\,V(1)\big)=0$ puisque les deux représentations sont irréductibles et ne sont pas isomorphes et ainsi $\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{U}_{b,2}(L)\big)\to\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)$ est surjective. Il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big)\to\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)$$

est un isomorphisme; elle est induite par la surjection naturelle $p\colon \mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_p}L=\mathrm{B}_b(L)\to\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L$. Il existe $\alpha'\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\alpha\in L$ tel que le noyau de p soit engendré par $e\coloneqq\alpha'\otimes1-1\otimes\alpha$, i.e. $\mathrm{Ker}\,p=e\cdot\mathrm{B}_b(L)$. Notons que $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit non-trivialement sur e au travers de son quotient non-ramifié $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par la même méthode que pour le point 3, montrons que $\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{Ker}\,p\big)=0$. En gardant les mêmes notations, on obtient

$$V^*\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Ker}\,p\cong ef_bt^{-b}\mathrm{B}_b(L)\oplus ef_0\mathrm{B}_b(L),$$

qui n'a pas d'invariant sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ puisqu'il agit non-trivialement sur e au travers d'un quotient fini. Ainsi on obtient que $\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big)\cong\mathrm{Hom}\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)$ et que $\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big)\to\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)$ est injective. Mais comme la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle et que le lemme 12.15 donne l'annulation du Ext^2, on en déduit que $\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)$ est de L-dimension 1, ce qui permet de conclure qu'on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b\otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}}L\big)\cong\mathrm{Ext}^1\big(V\,,\,\mathrm{B}_b(L)\big)$; ceci achève la preuve du lemme.

□

12.4.4. *Multiplicité des* $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$. — On passe maintenant au calcul de la multiplicité d'une représentation de la forme $V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$ dans la cohomologie proétale isotriviale du demi-plan p-adique. Plus précisément, l'énoncé que l'on va démontrer est le suivant :

Théorème 12.17. — *Soient* $a,b\in\mathbb{N}$ *tels que* $0<a+1<b$,

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\,\mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}^{[a,b]}(1)\big)\big)\cong\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'\oplus\underline{W}_{a,b}.$$

Remarquons qu'un $\underline{W}_{a,b}$ apparaît en plus de ce que l'on veut mais lorsqu'on prend les vecteurs G-bornés, il disparaît. Fixons donc $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $0\leqslant a<b$. Pour démontrer cette proposition, on va commencer par modifier légèrement le diagramme de la proposition 12.13 en prenant le quotient par le terme de gauche. Pour simplifier le diagramme, posons

$$Y\coloneqq\frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}t^a\mathrm{B}_b}{\underline{W}_{a,b}\otimes_L t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)},\ \ Q(L)\coloneqq\frac{t^a\mathrm{B}_b(L)}{t^a\mathrm{U}_{b,2}(L)};$$

ceci donne la suite exacte

$$0\to\underline{W}_{a,b}\otimes_L Q(L)\to Y\to\frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}}\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{B}_b(L)\to0. \tag{12.2}$$

On obtient le diagramme commutatif suivant de L-espaces de Fréchet, à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{W}_{a,b}\otimes_L Q(L) \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \underline{W}_{a,b}\otimes_L Q(L) \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b] \arrow[r] \arrow[d] & \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)'\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{U}_{b-1,2}(L) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}}\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{B}_b(L) \arrow[r] & \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{B}_b(L) \arrow[r] & \big(\underline{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{a,b}\big)'\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{B}_b(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On se donne $\mathcal{L}\in L$. On va maintenant appliquer $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\ \cdot\ \big)$ à ce diagramme. Posons

$$E_2\coloneqq\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\,Q(L)\big),$$

qui est un L-espace vectoriel de dimension 2 d'après le 5 du lemme 12.16. On obtient la proposition suivante :

Proposition 12.18. — *On a un diagramme commutatif de L-représentations localement analytiques de G, à lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{W}_{a,b} \otimes_L E_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \underline{W}_{a,b} \otimes_L E_2 \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, Y\big) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]\big) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}} \arrow[r] & \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] \arrow[r] & \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $V := V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}$. On commence par utiliser le 3 du lemme 12.16 pour obtenir les termes de la ligne du bas puisque $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, t^a\mathrm{B}_b(L)\big)$ est un L-espace vectoriel de dimension 1. De même, le 2 du lemme 12.16 nous donne

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)'\widehat{\otimes}_L t^a\mathrm{U}_{b-1,2}(L)\big) \cong \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)'.$$

De plus, la dernière flèche verticale obtenue est injective et c'est donc un isomorphisme car $\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}$ est irréductible. Il reste à démontrer la surjectivité des flèches obtenues. Pour la flèche horizontale en bas à gauche ceci découle de ce qu'il n'y a pas de morphisme G-équivariant non-nul $\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lalg}}\big)' \to \frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}}$ parce que ces L-représentations sont les duaux de L-représentations irréductibles non-isomorphes. De même, pour la surjectivité de la flèche verticale en bas à gauche, on doit justifier que la flèche

$$\frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}} \to \mathrm{Ext}^1_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,;\, Q(L)\big) \otimes_L \underline{W}_{a,b},$$

obtenue en appliquant $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\ \cdot\ \big)$ à la suite exacte (12.2), est nulle. Or, on sait que $\frac{\mathcal{O}^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]}{\underline{W}_{a,b}}$ est irréductible et n'est pas isomorphe à $\underline{W}_{a,b}$, donc la flèche ci-dessus est nulle. On conclut par le lemme du serpent pour obtenir que la flèche verticale $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]\big) \to \omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b]$ est surjective. □

12.4.5. *Preuve du théorème 12.17.* — On peut maintenant démontrer le théorème 12.17. On note $H_{\mathcal{L}} := \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]\big)$. Comme $\omega^0_{\mathrm{Dr}}[a,b] \cong \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)'$, la colonne du milieu dans le diagramme précédent fournit une suite exacte

$$0 \to \underline{W}_{a,b} \otimes_L E_2 \to H_{\mathcal{L}} \to \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)' \to 0. \tag{12.3}$$

Il suffit d'analyser la classe de l'extension que l'on obtient ici. Pour commencer, on applique $\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\ \cdot\ \big)$ au diagramme de la proposition 12.18. Rappelons de plus que $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(\big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)'\,,\, \underline{W}_{a,b}\big) \cong \mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(\underline{W}^*_{a,b}\,,\, \underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big) \cong \mathrm{Hom}\big(\mathbb{Q}_p^\times\,,\, L\big)$ qui est un L-espace vectoriel de dimension 2. Ainsi, il suffit de montrer que l'extension (12.3) est celle que l'on veut. Ainsi, l'extension précédente nous donne un sous-espace $L\cdot e \subsetneq \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Q}_p^\times\,,\, L\big)\big)$ correspondant à $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]\big)$ et on veut montrer qu'il n'est pas nul et que par l'identification $\mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Q}_p^\times\,,\, L\big)\big) \cong \mathbb{P}^1(L)$ du paragraphe 8.1.6, il correspond à $\mathcal{L} \in L$.

Soit $\mathcal{L}_1 \in L \subset \mathbb{P}^1(L)$ et considérons l'extension non-scindée associée à $\mathcal{L}_1$:

$$0 \to \underline{W}_{a,b} \to \big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}_1}^{[a,b]}\big)' \to \big(\underline{\mathrm{St}}_{a,b}^{\mathrm{lan}}\big)' \to 0. \tag{12.4}$$

Alors, d'après le théorème 12.4, et comme les actions de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et G commutent sur $\mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]$, on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}_1}^{[a,b]}\big)'\,,\, H_{\mathcal{L}}\big) \cong \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\,,\, \mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}_1}^{[a,b]}\big)'\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[a,b]\big)\big) \cong \begin{cases} L & \text{si } \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}, \\ 0 & \text{si } \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}. \end{cases}$$

En particulier, l'extension (12.3) ne peut pas être triviale et il reste à justifier que ce n'est pas l'extension universelle. L'extension universelle $\big(\widetilde{\underline{\Sigma}}^{[a,b]}\big)'$ est l'unique extension de $\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'$ par $\underline{W}_{a,b}$ et comme $\mathrm{Ext}^1_{L[\bar{G}]}\big(\underline{W}_{a,b}\,;\underline{W}_{a,b}\big) = 0$, c'est bien une extension de $\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'$ par $\underline{W}_{a,b}^{\oplus 2}$. Rappelons que $\big(\widetilde{\underline{\Sigma}}^{[a,b]}\big)'$ est indépendant de $\mathcal{L}$, mais pour tout $\mathcal{L}_1 \in L$ on a un quotient $\big(\widetilde{\underline{\Sigma}}^{[a,b]}\big)' \to \big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}_1}^{[a,b]}\big)'$. Ainsi on ne peut pas avoir d'injection $\big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)' \to \big(\widetilde{\underline{\Sigma}}^{[a,b]}\big)'$ et donc en vertue de l'entrelacement calculé ci-dessus, $H_{\mathcal{L}} \neq \big(\widetilde{\underline{\Sigma}}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)'$. Finalement, on a montré que

$$H_{\mathcal{L}} \cong \big(\underline{\Sigma}_{\mathcal{L}}^{[a,b]}\big)' \oplus \underline{W}_{a,b}.$$

$\square$

13. Fin de la preuve

Rappelons que nos efforts précédents ont abouti au théorème suivant :

Théorème 13.1. — *Soit* Π *une L-représentation spéciale ou cuspidale. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}\big(\Pi' \,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) \cong \begin{cases} V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}} \otimes_L \mathrm{JL}^{[a,b]}_M & \text{si } \Pi = \Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}} \text{ et } M \text{ de niveau} \leqslant n, \\ 0 & \text{si } \Pi \text{ n'est pas du type ci-dessus.} \end{cases}$$

Soient a, b des entiers tels que $0 \leqslant a < b$ et soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$ module spécial ou cuspidal de pentes $\frac{a+b}{2}$ libre de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. On conserve les notations des paragraphes précédents. On rappelle que l'on note

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M, a, b] \coloneqq \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M)\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\underline{\mathbb{V}}^{[a,b]}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big).$$

Corollaire 13.2. — *Si* $\mathcal{L}$ *est une L-droite de* M_{dR}*, alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M, a, b]\big) \cong \Pi^{[a,b]\,\prime}_{M,\mathcal{L}}.$$

En particulier cet entrelacement n'est pas nul.

Démonstration. — On sait d'après le théorème 10.1 que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M, a, b]\big)$ est l'ensemble des vecteurs G-bornés de $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{pét}}[M, a, b]\big)$. Or, cet espace s'identifie à ${}^{\mathrm{lan}}\Pi^{[a,b]\,\prime}_{M,\mathcal{L}}$ et le résultat est clair puisque $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ est le complété unitaire universel de ${}^{\mathrm{lan}}\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$. □

Théorème 13.3. — *Soit* V *une L-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$*. Alors,*

1. $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) \neq 0$ *si et seulement s'il existe* $a, b \in \mathbb{N}$ *tel que* $a < b$ *et* $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$ *tel que* $V^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ *soit un quotient de* V.
2. *Le L-Banach* $\mathbf{\Pi}^{[a,b]}_M(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}[M, a, b]\big)'$ *est admissible, de longueur finie en tant que représentation de* G*, et ses facteurs de Jordan-Hölder sont isomorphes à des* $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathcal{L}}$ *pour certains* $\mathcal{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$.

On en déduit que la cohomologie étale p-adique à coefficients isotriviaux encode la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations spéciales et supercuspidales de dimension 2. En particulier, le socle de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\mathbb{V}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)$ ne contient que des représentations spéciales ou supercuspidales de dimension 2 de poids (a, b).

Corollaire 13.4. — *Soit* V *une L-représentation absolument irréductible de* $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ *de dimension* $\geqslant 2$.

1. *Si* V *est spéciale ou supercuspidale, de dimension* 2,
$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) \cong \mathbf{\Pi}(V)' \otimes_L \mathrm{JL}^{\mathrm{lalg}}(V).$$
2. *Dans tous les autres cas,*
$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}]}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = 0.$$

On démontre maintenant le théorème 13.3.

Démonstration. — Montrons que si V est une L-représentation absolument irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension $\geqslant 3$ alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big) = 0.$$

On raisonne par contradiction en supposant le contraire. Posons

$$\Pi(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}\big(V\,,\, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^\infty_{\mathrm{Dr},C}\,;\,\mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big),$$

qui définit une L-représentation de Banach contenant un réseau que l'on note $\Pi^+(V)$ et dont la réduction modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_L$ de O_L est de longueur finie, par le théorème de finitude, donc admissible. Ainsi $\Pi(V)$ est une L-représentation de Banach unitaire admissible et de longueur finie. On peut donc supposer que $\Pi(V)$ contient une L-représentation de Banach unitaire, admissible et absolument irréductible que l'on note Π. On en déduit une injection $V \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathrm{M}^n_{\mathrm{Dr},C}\,; \mathrm{Sym}\,\underline{\mathbb{V}}_{\mathrm{Dr}}(1)\big)\big)$ ce qui est une contradiction. $\square$

Références

[1] Abhinandan. preprint ; https ://arxiv.org/abs/2308.10736 Syntomic complex and p-adic nearby cycles, 2023.

[2] A. Beilinson and V. Drinfeld. preprint ; https ://arxiv.org/abs/math/0501398 Opers, 2005.

[3] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze. Integral p-adic Hodge theory. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 128 :219–397, 2018.

[4] G. Bosco. preprint ; https ://arxiv.org/abs/2110.10683 On the p-adic pro-étale cohomology of Drinfeld symmetric spaces, 2023.

[5] G. Bosco. preprint ; https ://arxiv.org/abs/2306.06100 Rational p-adic hodge theory for rigid-analytic varieties, 2023.

[6] A.-C. L. Bras. Overconvergent relative de Rham cohomology over the Fargues-Fontaine curve, 2018.

[7] C. Breuil. Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 37(4) :559–610, 2004.

[8] O. Brinon. Représentations p-adiques cristallines de de Rham dans le cas relatif. *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.*, 112 :1–158, 2008.

[9] K. Česnavičius and T. Koshikawa. The A_{inf}-cohomology in the semistable case. *Compos. Math.*, 155(11) :2039–2128, 2019.

[10] P. Colmez. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules. In *Représentations p-adiques de groupes p-adiques II : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules*, pages 281–509. Paris : Société Mathématique de France, 2010.

[11] P. Colmez. La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques. In *Automorphic forms and Galois representations. Proceedings of the 94th London Mathematical Society (LMS) – EPSRC Durham symposium, Durham, UK, July 18–28, 2011. Volume 1*, pages 286–358. Cambridge : Cambridge University Press, 2014.

[12] P. Colmez. Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21(3) :797–838, 2019.

[13] P. Colmez and G. Dospinescu. Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra Number Theory*, 8(6) :1447–1519, 2014.

[14] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld : Le cas de la dimension 1. *J. Am. Math. Soc.*, 33(2) :311–362, 2020.

[15] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Cohomology of p-adic Stein spaces. *Invent. Math.*, 219(3) :873–985, 2020.

[16] P. Colmez, G. Dospinescu, and W. Nizioł. Factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld. *Forum Math. Pi*, 11 :62, 2023. Id/No e16.

[17] P. Colmez, G. Dospinescu, and V. Paškūnas. The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Camb. J. Math.*, 2(1) :1–47, 2014.

[18] P. Colmez and J.-M. Fontaine. Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.

[19] S. Dasgupta and J. Teitelbaum. The p-adic upper half plane. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 65–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[20] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.

[21] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compos. Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995.

[22] E. de Shalit. The p-adic monodromy-weight conjecture for p-adically uniformized varieties. *Compos. Math.*, 141(1) :101–120, 2005.

[23] G. Dospinescu and A.-C. Le Bras. Revêtement du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p-adique. *Ann. Math. (2)*, 186(2) :321–411, 2017.

[24] V. G. Drinfel'd. Coverings of p-adic symmetric regions. *Funct. Anal. Appl.*, 10 :107–115, 1976.

[25] M. Emerton. p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups. *Duke Math. J.*, 130(2) :353–392, 2005.

[26] M. Emerton. A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$. *Pure Appl. Math. Q.*, 2(2) :279–393, 2006.

[27] L. Fargues and J.-M. Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, volume 406 of *Astérisque*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2018.

[28] J.-M. Fontaine. Exposé VIII : Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables. In *Périodes p-adiques. Séminaire du Bures-sur-Yvette, France, 1988.*, pages 321–347. Paris : Société Mathématique de France, 1994.

[29] J.-M. Fontaine. Presque $\mathbb{C}_p$-représentations. *Doc. Math.*, Extra Vol. :285–385, 2003.

[30] J.-M. Fontaine. Almost $\mathbb{C}_p$ Galois representations and vector bundles. *Tunis. J. Math.*, 2(3) :667–732, 2020.

[31] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory. A first course*, volume 129 of *Grad. Texts Math.* New York etc. : Springer-Verlag, 1991.

[32] P. Fust. Continuous group cohomology and Ext-groups. *Münster J. Math.*, 15(2) :279–304, 2022.

[33] E. Grosse-Klönne. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.*, 519 :73–95, 2000.

[34] E. Grosse-Klönne. De Rham cohomology of rigid spaces. *Math. Z.*, 247(2) :223–240, 2004.

[35] E. Grosse-Klönne. Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfel'd's symmetric space. *J. Algebr. Geom.*, 14(3) :391–437, 2005.

[36] N. Jacobson. *Lie algebras*, volume 10 of *Intersci. Tracts Pure Appl. Math.* Interscience Publishers, New York, NY, 1962.

[37] K. S. Kedlaya and R. Liu. *Relative p-adic Hodge theory : foundations*, volume 371 of *Astérisque*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2015.

[38] K. S. Kedlaya and R. Liu. Finiteness of cohomology of local systems on rigid analytic spaces, 2016.

[39] M. Lazard. Groupes analytiques p-adiques. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 26 :389–603, 1965.

[40] V. Paškūnas. The image of Colmez's Montreal functor. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 118 :1–191, 2013.

[41] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Ann. Math. Stud. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press*, 1996.

[42] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p-adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1) :47–122, 1991.

[43] P. Schneider and J. Teitelbaum. Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2. *J. Am. Math. Soc.*, 15(2) :443–468, 2002.

[44] P. Scholze. p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. *Forum Math. Pi*, 1 :77, 2013. Id/No e1.

[45] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of p-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2) :145–237, 2013.

[46] B. Schraen. Représentation p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées. *Isr. J. Math.*, 176 :307–361, 2010.

[47] K. Shimizu. Constancy of generalized Hodge-Tate weights of a local system. *Compos. Math.*, 154(12) :2606–2642, 2018.

[48] M. Strauch. Geometrically connected components of Lubin-Tate deformation spaces with level structures. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(4) :1215–1232, 2008.

[49] F. Tan and J. Tong. Crystalline comparison isomorphisms in p-adic Hodge theory : the absolutely unramified case. *Algebra Number Theory*, 13(7) :1509–1581, 2019.

3 mars 2024

Arnaud Vanhaecke, DMA ENS, 45 rue d'Ulm, 75005, Paris • *E-mail :* arnaud.vanhaecke@ens.fr