FACTORISATION DE LA COHOMOLOGIE DE SYSTÈMES LOCAUX p-ADIQUES SUR LE DEMI-PLAN DE DRINFELD

par

Arnaud Vanhaecke

Résumé. — On calcule le premier groupe de cohomologie de l'algèbre symétrique du système local étale p-adique universel sur la tour de revêtement du demi-plan p-adique de Drinfeld. Le résultat s'énonce sous une forme factorisée en utilisant la correspondance de Langlands p-adique en famille sur les anneaux de Kisin. Ce travail étend les résultats correspondants de Colmez, Dospinescu et Nizioł pour les coefficients triviaux. Il repose sur le calcul des multiplicités automorphes dans le groupe de cohomologie étale du système local, obtenu dans un article antérieur, et sur la description des anneaux de Kisin pour le type spécial comme fonctions sur un ouvert analytique de la droite projective.

Abstract. — We compute the first cohomology group of the symmetric algebra of the universal étale p-adic local system on the tower of coverings of Drinfeld's p-adic half-plane. The result takes a factorized form, using the p-adic Langlands correspondence in families over Kisin rings. This work extends the corresponding results of Colmez, Dospinescu, and Nizioł for trivial coefficients. It relies on the computation of automorphic multiplicities in the étale cohomology group of the local system, done in a previous paper, as well as on the description of the Kisin rings for the special type as functions on an analytic open subset of the projective line.

Table des matières

Ce travail a été financé par le Morningside Center of Mathematics, CAS.

1. Introduction

Soit p un nombre premier, $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\check{G} := \mathrm{D}^\times$ le groupe des unités de D, l'algèbre des quaternions non scindée sur $\mathbb{Q}_p$. Soit C le complété d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, et soit L une extension finie, assez grande, de $\mathbb{Q}_p$ qui est notre corps des coefficients. Dans [**28**], nous avons calculé la multiplicité des représentations galoisiennes dans la cohomologie (c'est-à-dire, dans le premier groupe de cohomologie) de l'algèbre symétrique du système local universel, notée $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$, sur la tour de revêtements de Drinfeld $\{\breve{\mathrm{M}}_C^n\}_{n\geqslant 0}$, en termes de la correspondance de Langlands p-adique.

Ce travail étendait des résultats de Colmez–Dospinescu–Nizioł [**10**] qui traitent le cas des coefficients triviaux $L(1)$. Les deux différences principales sont les suivantes :

- Alors que la cohomologie étale de $\{\breve{\mathrm{M}}_C^n\}_{n\geqslant 0}$ à coefficients dans $L(1)$ fait apparaître les représentations potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate $(0,1)$, la cohomologie à coefficients dans $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$ fait apparaître toutes les représentations potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate réguliers positifs.
- Une seconde différence, plus importante, est que la cohomologie étale de $\breve{\mathrm{M}}_C^0$ à coefficients dans $L(1)$ est simplement le dual d'une steinberg continue, alors qu'à coefficients dans $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$, elle fait apparaître toutes les représentations semi-stables non cristallines (et même une représentation cristalline dite *exceptionnelle*), avec la multiplicité attendue (*i.e.* donnée par la correspondance de Langlands p-adique).

À la suite de [**10**] et pour $p > 3$, Colmez–Dospinescu–Nizioł [**12**] déterminent la structure complète de la cohomologie étale de[(1)] $\{{}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\}_{n\geqslant 0}$ à coefficients dans $L(1)$ comme $L[G\times\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times\check{G}]$-module. Le résultat s'énonce sous une forme factorisée, similaire à la description d'Emerton [**18**] dans le cas de la cohomologie complétée des courbes modulaires, et fait intervenir les anneaux de déformation potentiellement cristallins introduits par Kisin [**22**], dont certaines propriétés essentielles (en particulier que ce sont des produits finis d'anneaux principaux) ont été établies dans [**11**].

1.1. Énoncés des résultats.

— Le but de cet article est de poursuivre cette entreprise, à partir des résultats de [**28**], pour obtenir une description similaire de la cohomologie de ${}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ à coefficients dans $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$, comme $L[G\times\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times\check{G}]$-module, sous une forme factorisée :

Théorème 1.1. — *Pour $p > 3$, on a un isomorphisme de $L[G\times\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\times\check{G}]$-modules topologiques :*

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\,;\,\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)\big) \cong \bigoplus_{\lambda}\bigoplus_{M}\Big(\widehat{\bigoplus_{\mathcal{B}}}\,\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})'\otimes\rho^\lambda_{\mathcal{B},M}\otimes\check{R}^\lambda_{\mathcal{B},M}\Big)\otimes_L \mathrm{JL}^\lambda_M.$$

Expliquons brièvement les termes de cet énoncé, qui seront détaillés dans la suite.

- La première somme porte sur les *poids de Hodge-Tate* $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{N}^2$ tels que $\lambda_2 > \lambda_1 \geqslant 0$. La seconde somme porte sur les L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-modules spéciaux et cuspidaux M compatibles à λ et de niveau $\leqslant n$. La troisième somme, complétée pour la topologie p-adique, porte sur les blocs $\mathcal{B}$ des représentations de G modulo p que Paškūnas [**25**] identifie aux représentations $\bar\rho_{\mathcal{B}}$ modulo p de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ semi-simples et de dimension 2.
- Les produits tensoriels sont au-dessus de l'anneau de Kisin $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$ qui est l'anneau de déformation de $\bar\rho_{\mathcal{B}}$ des représentations de type M et à poids de Hodge-Tate λ ; $\check{R}^\lambda_{\mathcal{B},M}$ est le L-dual continu de $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$. Le $R^\lambda_{\mathcal{B},M}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-module $\rho^\lambda_{\mathcal{B},M}$ est la déformation universelle et $\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})'$ est le dual stéréotypique du $R^\lambda_{\mathcal{B},M}[G]$-module associé à $\rho^\lambda_{\mathcal{B},M}$ par la correspondance de Langlands p-adique.

(1) Deux petites différences avec le cas précédent sont de remplacer C par $\overline{\mathbb{Q}}_p$ dans les coefficients de l'espace de Drinfeld et de considérer ${}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \breve{\mathrm{M}}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/p$, où p est vu comme un élément diagonal de G.

- Le dernier terme JL_M^λ est la représentation localement algébrique de $\check{G}$, de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$, associée à M par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Pour M cuspidal (apparaissant dès que $n \geqslant 1$), le résultat est exactement le même que celui de [**12**], et fait intervenir les poids supérieurs. Il suffit alors, en utilisant les résultats de [**11**] et les calculs de [**28**], de reprendre pas à pas la démonstration de [**12**]. L'un des points les plus délicats de [**12**] est la démonstration de propriétés de finitude de la cohomologie étale modulo p ; à coefficients, on peut se ramener à ces résultats puisque le système local en question modulo p devient trivial sur un revêtement fini, puis utiliser la suite spectrale d'Hochschild-Serre pour obtenir ces propriétés pour tous les étages.

Pour M spécial (c'est-à-dire, $n = 0$ à torsion par un caractère près), alors que le résultat à coefficients dans $L(1)$ est simplement que la cohomologie étale du demi-plan de Drinfeld est le dual d'une steinberg continue, il est bien plus riche à coefficients non triviaux. La preuve de ce cas constitue le noyau dur du présent travail. En particulier, pour démontrer le théorème 1.1 dans le cas spécial, on doit adapter les résultats de [**11**] aux anneaux de Kisin de type spécial ; le théorème utilisé, obtenu dans la section 2, est le suivant :

Théorème 1.2. — *Supposons $p > 3$. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $\lambda_2 - \lambda_1 > 1$ et M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module de rang 2 tel que $N \neq 0$, alors l'anneau de Kisin $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$; en particulier, c'est un produit fini d'anneaux principaux.*

1.2. Notations. — On suppose que $p > 3$. Soient $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil et $\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Weil-Deligne. On note $\mathrm{O_D} \subset \mathrm{D}$ l'unique ordre maximal et $\varpi_{\mathrm{D}} \in \mathrm{O_D}$ une uniformisante. On suppose que L est assez grande, en particulier qu'elle contient toutes les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_p$. Soient $\mathrm{O}_L \subset L$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{m}_L \subset \mathrm{O}_L$ son idéal maximal et $k_L \coloneqq \mathrm{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel. On fixe $\varpi_L \in \mathfrak{m}_L$ une uniformisante. Pour A un anneau (topologique), une *A-représentation (continue)* désigne une représentation sur un A-module (topologique). De plus, tous les Hom entre A-représentations topologiques seront continus et munis de la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées.

Soit $\mathrm{rec}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p^\times$ le morphisme de réciprocité, normalisé de sorte que le frobenius arithmétique soit envoyé sur p, $\det\colon G \to \mathbb{Q}_p^\times$ le déterminant et $\mathrm{nrd}\colon \check{G} \to \mathbb{Q}_p^\times$ la norme réduite. Au travers de ces caractères tout L-caractère (*i.e.* L-représentation de dimension 1) de $\mathbb{Q}_p^\times$ définit un L-caractère de $\mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p}$, G et $\check{G}$ et s'il est unitaire (*i.e.* à coefficients dans $\mathrm{O}_L^\times$), de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$; on identifie ainsi les caractères de ces groupes. On note $\omega\colon \mathbb{Q}_p^\times \to \mathrm{O}_L^\times$ le *caractère cyclotomique* défini pour $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ par $\omega(x) = x|x|_p$.

1.2.1. *Types spéciaux et cuspidaux.* — On fixe une injection $\mathrm{D} \hookrightarrow M_2(L)$ qui définit une injection $\check{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(L)$, ce qui est possible puisque L contient une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$. On note

$$P \coloneqq \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_2 > \lambda_1\},$$

l'ensemble des *poids de Hodge-Tate réguliers* et $P_+ \subset P$ l'ensemble des poids réguliers positifs, *i.e.* tels que $\lambda_1 \geqslant 0$. À $\lambda \in P$ on associe $w(\lambda) \coloneqq \lambda_2 - \lambda_1 \in \mathbb{N}$ et $|\lambda| \coloneqq \lambda_2 + \lambda_1 \in \mathbb{Z}$ et on dit que $\lambda \in P$ est *très régulier* si $w(\lambda) > 1$. Si V est une L-représentation de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ on dit qu'elle est à poids de Hodge-Tate $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ si ses poids de Hodge-Tate sont λ_1 et λ_2.

Un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-module M muni d'un frobenius φ, d'un opérateur de monodromie N tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action lisse de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ commutant à φ et N. On associe à M une L-représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(M)$, *i.e.* une représentation du groupe $\mathscr{W}\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}$. Si M est de rang 2, on dit que M est

- *cuspidal* si $\mathrm{WD}(M)$ est absolument irréductible ; dans ce cas $N = 0$,
- *exceptionnel* si $\mathrm{WD}(M) \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ où $\chi_1, \chi_2\colon \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to L^\times$ sont deux caractères lisses tels que $\chi_1\chi_2^{-1} = |\mathrm{rec}|_p^{\pm 1}$, où $\mathrm{rec}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p^\times$ est le morphisme de réciprocité,
- *spécial* si M est exceptionnel ou bien si $N \neq 0$ (notons que ceci implique que $\mathrm{WD}(M)^{\mathrm{ss}}$ est exceptionnel).

Pour $\lambda \in P$, on note (*cf.* [**28**, Définition 11.2]) $\widetilde{\Phi N_\lambda}$ (*resp.* ΦN_λ) l'ensemble des L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-modules spéciaux[(2)] (*resp.* non exceptionnel) ou cuspidaux dont la moyenne des pentes est $1-|\lambda|/2$ (ΦN_λ ne dépend donc que de $|\lambda|$). À $\lambda \in P$ et $M \in \widetilde{\Phi N_\lambda}$ on associe des représentations localement algébriques unitaires de G et $\check{G}$:

- Soit LL_M la L-représentation lisse de G obtenue en appliquant la correspondance de Langlands locale à $\mathrm{WD}(M)$. On définit une L-représentation unitaire localement algébrique de G de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$:
$$\mathrm{LL}_M^\lambda \coloneqq \mathrm{LL}_M \otimes_L \mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \det{}^{\lambda_1},$$
où $\mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1}$ est la puissance $w(\lambda) - 1 = (\lambda_2 - \lambda_1) - 1$ symétrique de la représentation standard L^2 de G. On note ζ_M^λ le L-caractère central (unitaire) de LL_M^λ.

  Si M est spécial non exceptionnel, alors LL_M^λ est la torsion par $\zeta_M^\lambda \circ \det$ de la *steinberg localement algébrique de poids* $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$, définie par $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} = \mathrm{St}_L^\infty \otimes_L W_\lambda^*$, où
$$W_\lambda^* \coloneqq \mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \det{}^{\lambda_1} \otimes_L |\det|_p^{\frac{|\lambda|-1}{2}},$$
et St_L^∞ est la steinberg lisse de G *i.e.* l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ modulo les fonctions constantes. Notons que le dernier facteur de la définition de W_λ^*, où l'on rappelle que $|\lambda| = \lambda_2 + \lambda_1$, est présent pour s'assurer que $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est unitaire. Si M est exceptionnel, LL_M^λ est[(3)] l'unique extension localement algébrique de W_λ^* par $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ que l'on note $\widetilde{\mathrm{St}}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$.
- Soit[(4)] JL_M la L-représentation lisse de $\check{G}$ associée à LL_M par la correspondance de Jacquet-Langlands à JL_M. On définit une L-représentation unitaire localement algébrique de $\check{G}$ de poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$:
$$\mathrm{JL}_M^\lambda = \mathrm{JL}_M \otimes_L \mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \mathrm{nrd}^{\lambda_1},$$
où $\mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1}$ est vu comme représentation de $\check{G}$ au travers de l'injection $\check{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(L)$. Le caractère central de JL_M^λ est le même que celui de LL_M^λ, c'est-à-dire ζ_M^λ.

  Si M est spécial, $\mathrm{JL}_M^\lambda \cong \check{W}_\lambda \otimes_L (\zeta_M^\lambda \circ \mathrm{nrd})$ où

$$\check{W}_\lambda \coloneqq \mathrm{Sym}_L^{w(\lambda)-1} \otimes_L \mathrm{nrd}^{\lambda_1} \otimes_L |\mathrm{nrd}|_p^{\frac{|\lambda|-1}{2}}. \tag{1.1}$$

Côté galoisien, si $\lambda \in P$ et $M \in \widetilde{\Phi N_\lambda}$ alors on dit que V, une L-représentation de Rham de de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2, est *de type*[(5)] (M, λ) si elle est à poids de Hodge-Tate λ et [(6)] $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = M[-1]$. En particulier, on dit que V est *cuspidale* (*resp. spéciale*, *exceptionnelle*) si M est cuspidal (*resp.* spécial, exceptionnel).

Si V est de type (M, λ), elle est caractérisée par un invariant $\mathscr{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ qui est le paramètre de la filtration à deux crans sur $M_{\mathrm{dR}} \coloneqq (M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{\mathbb{Q}}_p)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. De plus, $\lambda \in P$, $M \in \Phi N_\lambda$ et $\mathscr{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ définissent un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module filtré $M_{\mathscr{L}}^\lambda$ qui, s'il est (faiblement) admissible[(7)], définit $V_{M,\mathscr{L}}^\lambda$, une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, par (*cf.* [**14**]) :

$$V_{M,\mathcal{L}}^\lambda \coloneqq \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(M_{\mathscr{L}}^\lambda[1]) \coloneqq (M \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathrm{B}_{\mathrm{st}})^{\varphi=p} \cap \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{\mathrm{dR}}), \tag{1.2}$$

(2) Pour $M \in \Phi N_\lambda$ non cuspidal on dira simplement que M est spécial, sous-entendu non exceptionnel. La distinction entre $\widetilde{\Phi N_\lambda}$ et ΦN_λ apparaît surtout pour la fluidité de l'introduction. Dans la suite on utilisera surtout ΦN_λ puisque les représentations exceptionnelles apparaissent par déformation des représentations spéciales non exceptionnelles.

(3) Ce n'est pas la définition « usuelle » de la correspondance de Langlands locale (*cf.* [**7**, VI 6. 11]).

(4) Il faut ici supposer que L est assez grand pour que JL_M soit défini sur L.

(5) On n'a pas recours ici à l'abus de notation dans [**28**] où le type d'une représentation exceptionnelle est donné par $M \in \Phi N_\lambda$.

(6) Pour D un φ-module et $k \in \mathbb{Z}$ on note $D[k]$ le module D muni du frobenius $p^k\varphi$.

(7) Si M est cuspidal alors $M_{\mathscr{L}}^\lambda$ est admissible pour tout $\mathscr{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$, si M est spécial il existe un seul $\mathscr{L} \in \mathbb{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ tel que $M_{\mathscr{L}}^\lambda$ n'est pas admissible et si M est exceptionnel tous les $M_{\mathscr{L}}^\lambda$ admissibles sont isomorphes.

et $V = V^{\lambda}_{M,\mathcal{L}}$, ce qui permet de reconstruire V à partir de $(M, \lambda, \mathscr{L})$. De plus, $V^{\lambda}_{M,\mathcal{L}}$ est de déterminant $\zeta^{\lambda}_{M}\omega$.

La correspondance de Langlands p-adique (*cf.* [**7**]), $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associe une L-représentation de Banach unitaire admissible de G à V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2. Si $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_{\lambda}$ ce foncteur établit une bijection entre les L-représentations absolument irréductibles V de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de type (M, λ) et les complétés admissibles unitaires irréductibles de $\mathrm{LL}^{\lambda}_{M}$ (*cf.* [**13**]) qui sont définis par $\mathbf{\Pi}^{\lambda}_{M,\mathcal{L}} \coloneqq \mathbf{\Pi}(V^{\lambda}_{M,\mathcal{L}})$. Si M est cuspidal (*resp.* spécial, exceptionnel), on dit que $\Pi^{\lambda}_{M,\mathcal{L}}$ est *cuspidale* (*resp. spéciale*, *exceptionnelle*).

Réciproquement, Colmez construit (*cf.* [**7**]) un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ qui associe à une L-représentation unitaire admissible de G une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2. Ces foncteurs satisfont $\mathbf{V} \circ \mathbf{\Pi} = \mathrm{id}$, ce qui signifie que $\mathbf{\Pi}(V)$ caractérise entièrement V.

1.2.2. *Blocs et anneaux de déformations.* — Soit $\zeta \colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to \mathrm{O}_L^{\times}$ un caractère lisse unitaire. Notons $\mathrm{Tors}\, G$ (*resp.* $\mathrm{Tors}^{\zeta} G$) la catégorie abélienne des O_L-représentations lisses de longueur finie (et de caractère central ζ). On définit sur $\mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G)$, l'ensemble des k_L-représentations irréductibles de $\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G$, la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par

$$\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G) \quad \mathrm{Ext}^1(\pi, \pi') \neq 0 \implies \pi \sim \pi',$$

et on appelle *bloc (absolu)* de $\mathrm{Tors}\, G$ (*resp.* $\mathrm{Tors}^{\zeta} G$) une classe d'équivalence de $\mathrm{Irr}(\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G)$ pour cette relation. La théorie de Gabriel (*cf.* [**20**]) fournit une décomposition suivant les blocs

$$\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G = \prod_{\mathcal{B}} \mathrm{Tors}^{(\zeta)}_{\mathcal{B}} G,$$

où $\mathrm{Tors}^{(\zeta)}_{\mathcal{B}} G \subset \mathrm{Tors}^{(\zeta)} G$ est la sous-catégorie pleine des O_L-représentations de $\mathrm{Tors}^{(\zeta)} G$ dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont dans $\mathcal{B}$. Paškūnas [**24**] décrit les blocs $\mathcal{B}$ de cette catégorie (*cf.* n° 3.2.3). La correspondance de Langlands p-adique semi-simple modulo p s'énonce alors comme une bijection (*cf.* [**25**]) :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Blocs absolues de} \\ \mathrm{Tors}\, G \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} k_L\text{-représentations} \\ \text{continues semi-simples de } \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \\ \text{de dimension 2} \end{array} \right\} \\ \mathcal{B} & \mapsto & \bar{\rho}_{\mathcal{B}} \end{array} \tag{1.3}$$

On fixe un bloc $\mathcal{B}$ et soit $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$ la k_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ associée. On note $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}}$ l'anneau de déformation du pseudo-caractère $(\mathrm{tr}\bar{\rho}_{\mathcal{B}}, \det \bar{\rho}_{\mathcal{B}})$ et de déterminant $\zeta\omega$. Pour $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_{\lambda}$, Kisin (*cf.* [**22**]) construit un quotient $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}}[1/p]$, dont on note L_x le corps résiduel, le morphisme $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}} \to L_x$ se factorise par $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M} \to L_x$ si et seulement si la L_x-représentation définie par $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}} \to L_x$ est, soit de type (M, λ), ou bien de type (M', λ) où M' est le L-$(\varphi, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module M muni de la monodromie $N = 0$ (*cf.* la remarque 2.39). On note $\rho^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M} \colon \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M})$ la $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}$-représentation universelle de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

On pose

$$R^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \coloneqq R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}[\tfrac{1}{p}], \quad \rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \coloneqq \rho^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}[\tfrac{1}{p}], \quad X^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \coloneqq \mathrm{Spec}\, R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}.$$

Soit $\lambda \in P$, $M \in \Phi N_{\lambda}$ et $\mathcal{B}$ un bloc de $\mathrm{Tors}^{\zeta^{\lambda}_{M}} G$ où l'on rappelle que ζ^{λ}_{M} est le caractère central de $\mathrm{LL}^{\lambda}_{M}$ (et de $\mathrm{JL}^{\lambda}_{M}$).

- La correspondance de Langlands p-adique en famille (*cf.* la définition 3.1) permet d'associer à $\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ une $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$-représentation topologique $\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})$. On note $\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})'$ son L-dual stéréotypique[(8)]. Pour $\mathfrak{m}_x \subset R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel, on note ρ_x la L_x-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ donnée par $\mathfrak{m}_x$. La représentation $\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})$ interpole les

(8) C'est le L-dual continu pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées, *i.e.* la dualité pour laquelle les espaces de Banach et de Fréchets sont réflexifs.

$\mathbf{\Pi}(\rho_x)$ au sens où $\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})' \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} L_x \cong \mathbf{\Pi}(\rho_x)'$, c'est-à-dire que les $\mathbf{\Pi}(\rho_x)'$ sont des quotients de $\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})'$.

- On définit $\widehat{\mathrm{LL}}^\lambda_M$ le *complété unitaire universel* de LL^λ_M (*cf.* [**9**]) et on choisit un O_L-réseau $\widehat{\mathrm{LL}}^{\lambda,+}_M \subset \widehat{\mathrm{LL}}^\lambda_M$. Le *complété $\mathcal{B}$-adique* (*cf.* [**11**] et n° 2.4.1) $\mathrm{LL}^{\lambda,+}_{M,\mathcal{B}}$ de $\mathrm{LL}^{\lambda,+}_M$ est défini comme la limite projective de ses quotients de longueur finie contenus dans $\mathrm{Tors}^{\zeta^\lambda_M}_{\mathcal{B}} G$. En particulier,
$$\widehat{\mathrm{LL}}^{\lambda,+}_M = \prod_{\mathcal{B}} \mathrm{LL}^{\lambda,+}_{M,\mathcal{B}},$$
et on pose $\mathrm{LL}^\lambda_{M,\mathcal{B}} \coloneqq \mathrm{LL}^{\lambda,+}_{M,\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{O}_L} L$.

1.2.3. *Cohomologie du système local p-adique.* — Le *demi-plan p-adique de Drinfeld* est défini comme
$$\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p} \coloneqq \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_p} \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p),$$
en tant que $\mathbb{Q}_p$-espace rigide analytique. Le groupe G agit par homographie sur $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\check{G}$ agit trivialement. Posons
$$\mathbb{G} \coloneqq G \times \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \times \check{G}.$$
Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$, on définit ${}^p\mathrm{M}^0_K \coloneqq \mathbb{H}_K \times \mathbb{Z}/2$ qui est muni d'une action de $\mathbb{G}$ où l'action sur $\mathbb{Z}/2$ est donnée par $+v_p(\det(g))$ pour $g \in G$, par le quotient non ramifié $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}/2$ pour $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et par $+v_p(\mathrm{nrd}(\check{g}))$ pour $\check{g} \in \check{G}$. Par convention, pour toute extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, on définit ${}^p\mathrm{M}^0_K$ par descente galoisienne à partir d'une extension quadratique de K. Le théorème de Drinfeld (*cf.* [**17**]) fournit une application surjective
$$\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}) \twoheadrightarrow \check{G}^+ \subset \check{G}, \tag{1.4}$$
où $\check{G}^+ \coloneqq \mathrm{O}_\mathrm{D}^\times$. On peut alors associer à ${}^p\mathrm{M}^0_K$ des revêtements étales et des systèmes locaux.

- Pour $n \geqslant 1$, le sous-groupe $\check{G}^+_n \coloneqq 1 + \varpi_\mathrm{D}^n \mathrm{O}_\mathrm{D} \subset \check{G}^+$ définit un revêtement étale galoisien ${}^p\mathrm{M}^n_K \to {}^p\mathrm{M}^0_K$. Pour $K = \mathbb{Q}_p$ c'est un revêtement de groupe de Galois[(9)] $\check{G}^+/\check{G}^+_n$. On obtient ainsi une action de $\mathbb{G}$ sur ${}^p\mathrm{M}^n_K$.
- Pour $\lambda \in P_+$, la L-représentation $\check{W}_\lambda$ (*cf.* (1.1)) de $\check{G}$ contient un réseau stable $\check{W}^+_\lambda$ et la surjection (1.4) permet de définir une O_L-représentation de $\pi_1^{\text{ét}}({}^p\mathrm{M}^n_K)$, c'est-à-dire (*cf.* [**15**]), un O_L-système local étale $\mathbb{V}^+_\lambda$ et son L-système local associé $\mathbb{V}_\lambda \coloneqq \mathbb{V}^+_\lambda \otimes_{\mathrm{O}_L} L$ sur ${}^p\mathrm{M}^n_K$.

On veut calculer la cohomologie étale du système local
$$\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1) \coloneqq \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{V}_\lambda(1) \otimes_L \check{W}_\lambda,$$
où (1) désigne la torsion par le caractère cyclotomique. Dans [**28**], on donne une interprétation de ce système local comme l'algèbre symétrique du module de Tate du O_D-module formel spécial universel sur ${}^p\mathrm{M}^n_K$. On n'utilisera pas cette interprétation ici. On pose
$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\,;\, \mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)\big) \coloneqq \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\,;\, \mathbb{V}_\lambda(1)\big) \otimes_L \check{W}_\lambda,$$
$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\,;\, \mathbb{V}_\lambda(1)\big) \coloneqq \left(\varprojlim_n \varinjlim_{[K:\mathbb{Q}_p]<\infty} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_K\,;\, \mathbb{V}^+_\lambda(1)/p^n\big) \right) \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$

Rappelons que dans [**28**], nous avons montré comment les L-représentations $V^\lambda_{M,\mathcal{L}}$ et $\Pi^\lambda_{M,\mathcal{L}}$ apparaissent par entrelacement dans la cohomologie de ${}^p\mathrm{M}^n_C$ à coefficients dans $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$. Il

(9) De plus si K est assez grand c'est un revêtement de groupe de Galois $\check{G}^1/\check{G}^1_n$ où $\check{G}^1 \coloneqq \ker \mathrm{nrd}$ est le noyau de la norme réduite et $\check{G}^1_n \coloneqq \check{G}^1 \cap \check{G}^1_n$.

s'agit ici d'utiliser ce résultat pour obtenir une description complète de la cohomologie de ${}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ à coefficients dans $\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)$.

1.3. Plan de l'article. — Après cette introduction, l'article est constitué de deux sections. La seconde section est consacrée à la preuve du théorème 1.2 ; ce théorème est ensuite utilisé pour démontrer le théorème 1.1.

- Dans la section 2, après avoir énoncé le résultat principal, on commence, (*cf.* n° 2.1), par quelques rappels sur les représentations spéciales et on construit un réseau dans le complété unitaire universel de la steinberg localement algébrique (*cf.* n° 2.1.3). On calcule alors les déformations de Rham infinitésimales universelles des représentations spéciales (*cf.* n° 2.2 et n° 2.3) avant d'en déduire les complétés de longueur finie de la steinberg localement algébrique (*cf.* la proposition 2.27). On utilise ensuite ces résultats pour déterminer les anneaux locaux complétés de l'anneau de Kisin (*cf.* n° 2.4.3) après avoir rappelé quelques propriétés des $\mathcal{B}$-complétés (*cf.* n° 2.4). Enfin, cela permet de définir une application analytique de l'analytifié du spectre de l'anneau de Kisin vers la droite projective et de montrer que cette application est une immersion ouverte (*cf.* n° 2.4.4), ce qui achève la preuve du théorème (*cf.* n° 2.5).
- Dans la section 3, on commence par définir les derniers termes de l'énoncé du théorème 1.1. On complète ensuite certains résultats de [**28**], notamment les théorèmes de finitude (*cf.* n° 3.1.3) et le passage de $\breve{\mathrm{M}}^n_C$ à ${}^p\mathrm{M}^n_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ (*cf.* n° 3.1.4). On démontre ensuite la décomposition en blocs au niveau entier (*cf.* n° 3.2.2). Enfin, après quelques lemmes techniques (*cf.* n° 3.2.3 et le lemme 3.22), on termine la preuve du théorème 1.1 au n° 3.2.4.

1.4. Remerciements. — Je tiens à remercier Colmez, Dospinescu et Nizioł ; il est évident que ce travail leur doit énormément. Je remercie le Morningside Center of Mathematics de la Chinese Academy of Sciences, où ce travail a été réalisé, pour ses excellentes conditions de travail. Je remercie particulièrement Zicheng Qian pour de nombreuses discussions éclairantes.

2. Anneaux de Kisin

Soit $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$. Si M est spécial, supposons de plus que $w(\lambda) > 1$.

$$T^\lambda_{M,\mathcal{B}} := \mathrm{End}(\mathrm{LL}^\lambda_{M,\mathcal{B}}), \quad Y^\lambda_{M,\mathcal{B}} := \mathrm{Spec}(T^\lambda_{M,\mathcal{B}}), \quad \sigma^\lambda_{M,\mathcal{B}} := \mathbf{V}(\mathrm{LL}^\lambda_{M,\mathcal{B}}). \tag{2.1}$$

On veut démontrer que $T^\lambda_{M,\mathcal{B}}$ est un anneau de déformation et que $\sigma^\lambda_{M,\mathcal{B}}$ est la famille universelle sur ce dernier. Le théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.1. —

1. *L'anneau $T^\lambda_{M,\mathcal{B}}$ s'identifie aux fonctions bornées sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$: algébriquement, c'est le produit d'anneaux principaux.*
2. *On a un isomorphisme d'anneaux $R^\lambda_{\mathcal{B},M} \cong T^\lambda_{M,\mathcal{B}}$. De plus $\sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$ est canoniquement isomorphe à la représentation universelle sur $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$, i.e. $\sigma^\lambda_{M,\mathcal{B}} \cong \rho^\lambda_{\mathcal{B},M}$.*

Remarque 2.2. —

- Quitte à prendre L plus grand, on peut supposer que le bloc $\mathcal{B}$ est absolu (*cf.* [**11**, Remarque 1.9]), ce que l'on fera dans toute la suite.
- Pour M cuspidal, ce théorème est démontré dans [**11**]. Dans la section 2, on traite le cas où M est spécial par les mêmes méthodes.
- La difficulté principale provient, pour M spécial, de la *représentation exceptionnelle* qui correspond à l'idéal maximal de $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$ pour lequel la représentation associée est cristalline. La raison est que cette représentation admet une déformation cristalline et on doit montrer qu'elle n'apparaît pas dans $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$.
- Pour M spécial et $w(\lambda)$ satisfaisant $1 \leqslant w(\lambda) \leqslant p-1$, en utilisant les résultats de Chitrao et Ghate (*cf.* [**4**]) on peut déterminer explicitement l'ouvert $(X^\lambda_{\mathcal{B},M})^{\mathrm{an}}$.

- Dans le cas où $w(\lambda) = 1$, la convention sera que $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M} = L$ pour le bloc de la steinberg, auquel cas $\rho^{\lambda}_{M,\mathcal{B}} = \zeta^{\lambda}_{M}\omega$, et $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M} = 0$ sinon.

Le but de cette section est donc de démontrer la proposition dans le cas où M est spécial, *i.e.* $M = \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$ (*cf.* n° 2.1.1). Dans ce cas, $\mathrm{LL}^{\lambda}_{M} = \mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda}$.

Soit $\zeta\colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to L^{\times}$ un caractère lisse unitaire, que l'on voit comme un caractère de G en précomposant avec le déterminant, et comme un caractère $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ en précomposant avec morphisme de réciprocité. On définit

- $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}}$ l'anneau de pseudo-déformation universel de $(\mathrm{tr}\bar{\rho}_{\mathcal{B}}, \det\bar{\rho}_{\mathcal{B}})$ de déterminant $\zeta\omega$,
- $Z^{\zeta}_{\mathcal{B}}$ le centre de la catégorie abélienne $\mathrm{Tors}^{\zeta}_{\mathcal{B}}G$.

L'un des outils principaux est le théorème de type $R = T$ de Paškūnas et Tung(10), (*cf.* [**26**]) :

Théorème 2.3. — *Soit $\zeta\colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to \mathrm{O}_L^{\times}$ un caractère lisse. Il existe un unique isomorphisme*

$$\iota^{\zeta}_{\mathcal{B}}\colon R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} Z^{\zeta}_{\mathcal{B}}.$$

Remarque 2.4. — Il n'est pas clair comment l'on peut déduire la conjecture de Breuil-Mézard dans le cas spécial des résultats de cette section en suivant [**11**]. L'une des raisons est que la réduction modulo ϖ_L du réseau que l'on construit au n° 2.1.3 n'est *a priori* pas semi-simple(11). Dans l'énoncé de [**11**, Proposition 5.9] et sa preuve, il est implicitement utilisé que l'on peut choisir un réseau dans un K-type cuspidal dont la réduction modulo ϖ_L soit semi-simple, ce qui permet la décomposition en somme directe.

2.1. La série spéciale p-adique

2.1.1. *Définition des représentations spéciales.* — Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier, on définit le L-(φ, N)-module spécial $\mathrm{Sp}_L(k)$ comme le L-espace vectoriel $\mathrm{Sp}_L(k) = Le_0 \oplus Le_1$ muni des endomorphismes

$$\begin{cases}\varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}}e_1\\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}}e_0,\end{cases} \qquad \begin{cases}Ne_1 = e_0\\ Ne_0 = 0,\end{cases}$$

qui est de pente $-\frac{k}{2}$. Tout L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module spécial non exceptionnel est de la forme $(\mathrm{Sp}_L(k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \otimes_L \chi$ pour $\chi\colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to L^{\times}$ un caractère lisse (*cf.* la preuve de [**27**, Proposition 1.3]).

Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier, on définit le L-(φ, N)-module exceptionnel $\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(k)$ comme le L-espace vectoriel $\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(k) = Le_0 \oplus Le_1$ muni des endomorphismes

$$\begin{cases}\varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}}e_1\\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}}e_0,\end{cases} \qquad \begin{cases}Ne_1 = 0\\ Ne_0 = 0,\end{cases}$$

C'est-à-dire que $\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(k)$ est le φ-module $\mathrm{Sp}_L(k)$ avec $N = 0$; sa pente est également $-\frac{k}{2}$. Tout L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module exceptionnel est de la forme $(\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \otimes_L \chi$ pour un caractère lisse $\chi\colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to L^{\times}$.

Soit $\lambda \in P_+$ et $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$.

---

(10) Comme on a fait l'hypothèse $p > 3$, c'est en fait [**24**] que l'on utilise. Comme suggéré dans [**12**], il est possible que cette hypothèse soit superflue, même s'il n'est pas tout à fait clair pour nous comment adapter certains arguments.

(11) Pour un K-type de la forme $\tau \otimes W$ avec τ lisse et W algébrique, sa réduction modulo ϖ_L n'est *a priori* pas semi-simple.

- Si $\mathcal{L} \in L$, on définit $D_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ le L-(φ, N)-module filtré dont le L-(φ, N)-module sous-jacent $\mathrm{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ et muni de la filtration

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \begin{cases} D_{\mathcal{L}}^{\lambda} & \text{si } i \leqslant -\lambda_2 + 1, \\ L(e_1 - \mathcal{L}e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leqslant i \leqslant -\lambda_1 + 1, \\ 0 & \text{si } -\lambda_1 + 2 \leqslant i. \end{cases}$$

- Si $\mathcal{L} = \infty$, on définit $D_{\mathcal{L}}^{\lambda} = D_{\infty}^{\lambda}$ comme le L-(φ, N)-module filtré de L-(φ, N)-module sous-jacent $\widetilde{\mathrm{Sp}}_L(|\lambda| - 2)$ et de filtration

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \begin{cases} D_{\mathcal{L}}^{\lambda} & \text{si } i \leqslant -\lambda_2 + 1, \\ L(e_1 - e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leqslant i \leqslant -\lambda_1 + 1, \\ 0 & \text{si } -\lambda_1 + 2 \leqslant i. \end{cases}$$

On pose $V_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_{\mathcal{L}}^{\lambda}[1])$ (*cf.* (1.2)), qui est une L-représentation spéciale de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} := \mathbf{\Pi}(V_{\mathcal{L}}^{\lambda})$ qui est une L-représentation spéciale de G. Puisque $w(\lambda) > 1$, ces représentations sont absolument irréductibles ; $\Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ est de caractère central[12] $\zeta_{\lambda} := \omega^{|\lambda|-1}$ et $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ est de déterminant $\zeta_{\lambda}\omega = \omega^{|\lambda|}$.

2.1.2. *Complété unitaire universel de* $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$. — Soit $\mathscr{C}^{\lambda} := \widehat{\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}}$ le complété unitaire universel de la représentation $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$. On connaît cet espace explicitement, en termes de fonctions de classe $\mathscr{C}^{u(\lambda)}$, où l'on définit $u(\lambda) := \frac{w(\lambda)-1}{2}$.

En effet, $\mathscr{C}^{\lambda}$ est isomorphe au quotient $\mathscr{C}^{\lambda} \cong \widetilde{\mathscr{C}^{\lambda}}/W_{\lambda}^{*}$ où $\widetilde{\mathscr{C}^{\lambda}} \subset \mathscr{C}^{0}(\mathbb{Q}_p, L)$ est le sous-espace des fonctions $f\colon \mathbb{Q}_p \to L$ de classe $\mathscr{C}^{u(\lambda)}$ (*cf.* [**5**, I.5] pour la définition) telles que la fonction $x \mapsto x^{w(\lambda)-1} f(1/x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^{u(\lambda)}$ sur $\mathbb{Q}_p$ et $W_{\lambda}^{*} \subset \widetilde{\mathscr{C}^{\lambda}}$ est le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $w(\lambda) - 1$. L'action de G sur $\widetilde{\mathscr{C}^{\lambda}}$ est définie par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad (g \star_{\lambda} f)(x) = |\det(g)|^{\frac{|\lambda|-1}{2}} \det(g)^{\lambda_1} (cx + d)^{w(\lambda)-1} f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)$$

On identifie $\mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$. Notons $\log\colon \mathbb{Z}_p^{\times} \to \mathbb{Q}_p \subset L$ le logarithme et pour $\mathcal{L} \in L$ on note $\log_{\mathcal{L}}\colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to L$ le logarithme étendu en posant $\log_{\mathcal{L}}(p) = \mathcal{L}$; de plus si $\mathcal{L} = \infty$, on pose $\log_{\infty} = v_p$. Pour $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L)$, $a \in \mathbb{Q}_p$ et $n \geqslant 1$ un entier, on définit la fonction $f_{\mathcal{L},a}^{n} \in \mathscr{C}^{0}(\mathbb{Q}_p, L)$ par

$$x \mapsto f_{\mathcal{L},a}^{n}(x) := (x - a)^n \log_{\mathcal{L}}(x - a).$$

De plus, pour $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L)$, on définit $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \mathscr{C}^{0}(\mathbb{Q}_p, L)$ le sous-espace engendré par les fonctions $h\colon \mathbb{Q}_p \to L$ de la forme

$$h = \sum_{i \in I} \lambda_i f_{\mathcal{L},a_i}^{n_i},$$

où I est un ensemble fini, et pour tout $i \in I$, $n_i \geqslant 1$ est un entier, $\lambda_i \in L$ et $a_i \in \mathbb{Q}_p$, tels que

- pour tout $i \in I$, $u(\lambda) < n_i \leqslant w(\lambda)$,
- $\deg\left(\sum_{i \in I} \lambda_i (x - a_i)^{n_i}\right) < u(\lambda)$.

La seconde condition est équivalente au fait que h ait un pôle d'ordre $< u(\lambda)$ en ∞ (*cf.* [**6**, V.1., 3]).

Lemme 2.5. — *On a $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \widetilde{\mathscr{C}}_{\lambda}$. On note $M_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ l'image de $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ dans $\mathscr{C}^{\lambda}$ et $\widehat{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ l'adhérence de $M_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ dans $\mathscr{C}^{\lambda}$. On a une suite exacte de L-représentations de Banach unitaires de G*

$$0 \to \widehat{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \to \mathscr{C}^{\lambda} \to \Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} \to 0.$$

[12] Pour $M = \mathrm{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ (ou $M = \widetilde{\mathrm{Sp}}_L(|\lambda| - 2)$), $\zeta_{\lambda} = \zeta_{M}^{\lambda}$ défini dans l'introduction.

Démonstration. — Ces résultats sont dus à Breuil, *cf.* [**3**, Lemme 3.3.2] pour le fait que $\widetilde{M}_{\mathcal{L}}^{\lambda} \subset \widehat{\mathscr{C}}_{\lambda}$ et [**3**, Corollaire 3.3.4] pour la suite exacte. □

On conclut ce paragraphe par trois énoncés pratiques sur $\mathscr{C}^{\lambda}$. On note $\mathscr{D}^{\lambda}$ le dual (stéréotypique) de $\mathscr{C}^{\lambda}$. La preuve du lemme suivant est exactement celle de [**12**, Lemme 5.3 b)] :

Lemme 2.6. — *Les vecteurs G-bornés de $(\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}})'$ et de $(\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lan}})'$ sont isomorphes à $\mathscr{D}^{\lambda}$.*

On calcule les vecteurs localement algébriques de $\mathscr{C}^{\lambda}$:

Proposition 2.7. — *On a $\mathrm{End}_{L[G]}(\mathscr{C}^{\lambda}) = L$.*

Démonstration. — Soit $\pi := \mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$, alors π est dense dans $\widehat{\pi}$ et comme $\mathrm{End}_{L[G]}(\pi) = L$ par le lemme de Schur classique, il suffit de prouver que $\widehat{\pi}^{\mathrm{lalg}} = \pi$ pour conclure.

Or on sait que $\widehat{\pi} \cong \mathscr{C}^{\lambda}$ et donc un vecteur localement algébrique se relève en une fonction localement algébrique $f \in \widetilde{\mathscr{C}}^{\lambda} \subset \mathscr{C}^{u(\lambda)}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), L)$. Par définition, f est une combinaison linéaire de produits d'une fonction lisse par un polynôme, donc il suffit de montrer que si $f \in \widetilde{\mathscr{C}}^{\lambda}$ est un polynôme alors $f \in W_{\lambda}^{*}$, c'est-à-dire qu'il est au plus de degré $w(\lambda) - 1$. Mais l'hypothèse sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{\lambda}$ implique que $x \mapsto x^{w(\lambda)-1} f(1/x)$ n'a pas de pôle en 0, ce qui permet de conclure. □

On caractérise les quotients de $\mathscr{C}^{\lambda}$ de longueur finie comme complétés de $\mathscr{C}^{\lambda}$ de longueurs finis.

Proposition 2.8. — *Soit Π une L-représentation unitaire de G de longueur finie. Alors Π est un quotient de $\mathscr{C}^{\lambda}$ si et seulement si on a un morphisme $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}} \hookrightarrow \Pi$ d'image dense.*

Démonstration. — Si Π est un quotient de $\mathscr{C}^{\lambda}$, puisque par la propriété universelle on a

$$\mathrm{Hom}_G(\mathscr{C}^{\lambda}, \Pi) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}, \Pi)$$

alors on a une application $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}} \to \Pi$ nécessairement injective puisque $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$ est irréductible et d'image dense par définition du complété unitaire universel.

Réciproquement, on obtient une application $\mathscr{C}^{\lambda} \to \Pi$ dont on doit montrer la surjectivité. Comme pour la preuve de [**11**, Proposition 3.2], c'est une conséquence du fait que Π est résiduellement de longueur finie (*cf.* [**13**]). □

2.1.3. *Réseau de $\mathscr{C}^{\lambda}$.* — Dans ce paragraphe, on construit un réseau de $\mathrm{St}_{\lambda}^{\mathrm{lalg}}$ dont le complété p-adique est un réseau dans $\mathscr{C}^{\lambda}$. Posons $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \subset G$, $I \subset K$ le *sous-groupe d'Iwahori* (*i.e.* le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p) et $Z \subset G$ le centre de G. De plus, on note $N := N_G(IZ)$ le normalisateur de IZ et KN son produit avec K. On a

$$w_p := \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = IZ \sqcup w_p IZ, \quad KN = KZ \sqcup w_p KZ.$$

Pour $\lambda \in P$, on a une O_L-représentation localement algébrique de G de dimension finie

$$W_{\lambda}^{+,*} := \mathrm{Sym}_{\mathrm{O}_L}^{w(\lambda)-1} \otimes_{\mathrm{O}_L} \det{}^{\lambda_1} \otimes_{\mathrm{O}_L} |\det|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

C'est un O_L-réseau de W_{λ}^{*} stable par KN. Posons

$$\mathcal{I}_0^{\lambda,(+)} := \mathrm{ind}_{KZ}^{G} W_{\lambda}^{(+),*}, \quad \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)} := \mathrm{ind}_{IZ}^{G} W_{\lambda}^{(+),*}$$

où les induites sont compactes. Alors $\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+}$ est un O_L-réseau G-stable de $\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda}$ et $\mathcal{I}_0^{\lambda,+}$ est un O_L-réseau G-stable de $\mathcal{I}_0^{\lambda}$. L'action de $w_p \in G$ définit une involution $\Pi\colon \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)} \to \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)}$ par $\Pi(f) = f \circ w_p$. Ainsi, on définit $\mathcal{I}_1^{\lambda,(+)} := (\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)})^{\Pi=-\mathrm{id}}$, de sorte que l'on a

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)} = \mathcal{I}_1^{\lambda,(+)} \oplus (\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)})^{\Pi=\mathrm{id}}.$$

La projection $\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)} \to \mathcal{I}_1^{\lambda,(+)}$ est donnée par $\Pi_- := \frac{1}{2}(\mathrm{id} - \Pi)$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.9. — *On a une surjection G-équivariante $\mathcal{I}_1^\lambda \twoheadrightarrow \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ telle que si l'on note $I^{\lambda,+}$ l'image de $\mathcal{I}_1^{\lambda,+}$ par cette surjection, qui définit un réseau de $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$, alors le complété p-adique de $I^{\lambda,+}$ définit un réseau de $\mathscr{C}^\lambda$, i.e.*

$$\mathscr{C}^\lambda = (\varprojlim_n I^{\lambda,+}/p^n) \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$

Remarque 2.10. — Notons que la surjection $\mathcal{I}_1^\lambda \twoheadrightarrow \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est exactement celle obtenue par Chitrao et Ghate [**4**, §4]. Notre preuve est légèrement différente et repose (de manière cachée à travers [**1**]) sur l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_p}) \cong (\mathrm{St}_L^\infty)'$ alors que le calcul de Chitrao et Ghate est explicite.

Commençons par définir le réseau $I^{\lambda,+}$. Soit $\mathrm{st}^+_{(0,1)} := \mathscr{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), \mathrm{O}_L)/\mathrm{O}_L$, où $\mathscr{C}$ désigne l'espace des fonctions, la O_L*-représentation de Steinberg finie*, que l'on considère comme une O_L-représentation de KZ par inflation. Pour $\lambda \in P$, posons

$$\mathrm{st}_\lambda^+ := \mathrm{st}^+_{(0,1)} \otimes_{\mathrm{O}_L} W_\lambda^{*,+}.$$

Comme $KZ/IZ \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, on obtient $\mathrm{ind}_{IZ}^{KZ} W_\lambda^{*,+} \cong \mathscr{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), W_\lambda^{*,+})$ et donc en appliquant le foncteur exact ind_{KZ}^G à la suite exacte

$$0 \to W_\lambda^{*,+} \xrightarrow{\iota} \mathscr{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), W_\lambda^{*,+}) \to \mathrm{st}_\lambda^+ \to 0,$$

on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_0^{\lambda,+} \xrightarrow{\mathrm{ind}_{KN}^G \iota} \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \to \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathrm{st}_\lambda^+ \to 0,$$

et l'on obtient un diagramme commutatif définissant $I^{\lambda,+}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_0^{\lambda,+} \arrow[r, "\mathrm{ind}_{KZ}^G \iota"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_-"] & \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathrm{st}_\lambda^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_0^{\lambda,+} \arrow[r, "\partial^+"] & \mathcal{I}_1^{\lambda,+} \arrow[r] & I^{\lambda,+} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Plus exactement on définit ∂^+ comme la composée $\mathcal{I}_0^{\lambda,+} \to \widetilde{\mathcal{I}}_0^{\lambda,+} \xrightarrow{\mathrm{ind}_{KZ}^G \iota} \widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \xrightarrow{\Pi_-} \mathcal{I}_1^{\lambda,+}$ et $I^{\lambda,+} := \mathcal{I}_1^{\lambda,+}/\partial^+(\mathcal{I}_0^{\lambda,+})$. On définit finalement $\partial = \partial^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L \colon \mathcal{I}_0^\lambda \to \mathcal{I}_1^\lambda$. Notons que $(\widetilde{\mathcal{I}}_1^{\lambda,(+)})^{\Pi=\mathrm{id}} = \mathrm{ind}_N^G W_\lambda^{+,*}$ et donc

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \mathrm{st}_\lambda^+ = \mathrm{ind}_N^G W_\lambda^{+,*} \oplus I^{\lambda,+} \tag{2.2}$$

en particulier, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.11. — *Le $k_L[G]$-module lisse $I^{\lambda,+}/\varpi_L$ est de type fini.*

On peut expliciter ∂^+ (*resp.* ∂) en interprétant les éléments des induites comme des fonctions. Notons

$$\widetilde{\mathsf{s}} \colon G/IZ \to G/KZ, \quad \widetilde{\mathsf{t}} = \widetilde{\mathsf{s}} \circ w_p \colon G/IZ \to G/KZ,$$

où $\widetilde{\mathsf{s}}$ est la projection canonique. L'application $\mathrm{ind}_{KN}^G \iota$ est explicitement donnée sur $f \in \mathcal{I}_0^{\lambda,+}$, vu comme fonction sur G/KZ, pour $a \in G/IZ$ par

$$(\mathrm{ind}_{KZ}^G \iota)(f)(a) = f(\widetilde{\mathsf{s}}(a)).$$

Ainsi, pour $a \in G/IZ$,

$$\partial^{(+)}(f)(a) = f(\widetilde{\mathsf{s}}(a)) - f(\widetilde{\mathsf{t}}(a)). \tag{2.3}$$

La preuve de la proposition 2.9 se fait par dualité. On note Ind l'induite sans condition sur le support. On commence par le lemme classique suivant, dont on esquisse une démonstration pour le confort du lecteur.

Lemme 2.12. — *Soit $H \subset G$ un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre et soit σ^+ une O_L-représentation localement algébrique de H, libre et de rang finie sur O_L. Notons $\sigma = \sigma^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L$, alors*

1. $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma)$ *est naturellement un espace de Fréchet et* $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma)' \cong \mathrm{ind}_H^G \sigma^*$,
2. $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma^+)' \cong \widehat{\mathrm{ind}_H^G \sigma^{*,+}}$, *où le complété à droite est p-adique,*
3. $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma)^{G-\mathrm{b}} \cong \mathrm{Ind}_H^G \sigma^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L$, *où l'exposant $G - \mathrm{b}$ désigne le sous-espace des vecteurs G-bornés.*

Démonstration. — Posons $V = (\mathrm{Ind}_H^G \sigma)$ et $U = \mathrm{ind}_H^G \sigma^*$. Comme G/H est dénombrable, $V \cong L^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans L, qui est un espace de Fréchet et $U \cong L^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites à valeurs dans L à support compact, qui est un espace de type LB (limite inductive d'espaces de Banach). Comme $L^{(\mathbb{N})}$ est le L-dual stéréotypique de $L^{\mathbb{N}}$ on obtient sans peine que $V' \cong U$.

Pour le second point, posons $V^+ = \mathrm{Ind}_H^G \sigma^+$ et $U^+ = \mathrm{ind}_H^G \sigma^{*,+}$. Alors $V^+ \otimes L \subset V \cong L^{\mathbb{N}}$ s'identife aux suites bornées à valeurs dans L qui est un espace de Smith (dual stéréotypique d'un banach). Ainsi, son dual s'identifie au L-banach

$$\left(\widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} \mathrm{O}_L\right) \otimes_{\mathrm{O}_L} L = \widehat{\bigoplus}_{\mathbb{N}} L,$$

où le complété est pour la norme p-adique, des suites de limite nulle. On en déduit que $(V^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L)' \cong \widehat{U}^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L$ et comme cet isomorphisme identifie les boules unités, on a $V^+ \cong \widehat{U}^+$.

Pour le dernier point, il suffit de remarquer que comme l'action de G sur G/H est transitive, $f \in V$, identifié à une fonction sur G/H, est G-bornée si et seulement si l'ensemble $\{f(s)\}_{s \in G/H}$ est borné, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $p^n f \in V^+$, *i.e.* $f \in V^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} L$. □

Posons

$$\mathcal{J}_0^{\lambda,(+)} := \mathrm{Ind}_{KZ}^G W_\lambda^{(+)}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)} := \mathrm{Ind}_{IZ}^G W_\lambda^{(+)},$$

où les induites sont les induites classiques (sans condition sur le support). Comme précédemment, on définit $\Pi \colon \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)} \to \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)}$ la précomposition par w_p et on pose $\mathcal{J}_1^{\lambda,(+)} := (\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)})^{\Pi=-\mathrm{id}}$ de sorte que

$$\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)} := \mathcal{J}_1^{\lambda,(+)} \oplus (\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\lambda,(+)})^{\Pi=\mathrm{id}}.$$

On commence par réinterpréter ces espaces en termes de fonctions sur l'arbre de Bruhat-Tits. Soit $\mathcal{T}_\bullet$ l'arbre de Bruhat-Tits, le graphe défini par $\mathcal{T}_0 = G/KZ$ et $\mathcal{T}_1 = G/N$ et muni des deux flèches $\mathsf{s}, \mathsf{t} : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_0$ source et but que l'on va expliciter. La décomposition de Bruhat donne

$$G = B^+ KZ \sqcup w_p B^+ KZ, \quad B^+ := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme l'application $G/IZ \to G/N$ est d'ordre 2, tout élément $a \in G/N$ a pour antécédents $\{\widetilde{a}, w_p \widetilde{a}\} \subset G/IZ$ choisis tels que $\widetilde{a} \in B^+ KZ$. On pose alors

$$\mathsf{s}(a) := \widetilde{\mathsf{s}}(\widetilde{a}), \ \mathsf{t}(a) := \widetilde{\mathsf{t}}(\widetilde{a}) = \widetilde{\mathsf{s}}(w_p \widetilde{a}).$$

L'idée étant que l'on peut considérer G/IZ comme l'ensemble des arêtes dédoublées et $\widetilde{\mathsf{s}}, \widetilde{\mathsf{t}}$ définissant une structure de graphe non orienté[13] sur l'arbre de Bruhat-Tits. De plus, on obtient

$$\mathcal{J}_i^\lambda \cong \mathscr{C}(\mathcal{T}_i, W_\lambda),$$

où pour $i = 1$ cet isomorphisme identifie les fonctions impaires sur les arêtes non orientées G/IZ (au sens où changer le sens de l'arête change le signe de la fonction sur cette arête) aux

[13] Rappelons que si $\mathsf{s}, \mathsf{t} \colon G_1 \to G_0$ est un graphe (orienté) alors on lui associe un graphe non orienté en posant $\widetilde{G}_1 := G_1 \sqcup G_1'$ où $G_1' = G_1$ et $\widetilde{\mathsf{s}}, \widetilde{\mathsf{t}} \colon \widetilde{G}_1 \to G_0$ sont définis par $\widetilde{\mathsf{s}}|_{G_1} = \mathsf{s}$, $\widetilde{\mathsf{s}}|_{G_1'} = \mathsf{t}$, $\widetilde{\mathsf{t}}|_{G_1} = \mathsf{t}$, $\widetilde{\mathsf{t}}|_{G_1'} = \mathsf{s}$

fonctions sur les arêtes orientées. *Le laplacien* $\Delta\colon \mathcal{J}_1^\lambda \to \mathcal{J}_0^\lambda$ est défini sur $f \in \mathscr{C}(\mathcal{T}_1, W_\lambda)$ pour $s \in \mathcal{T}_0$ par

$$(\Delta f)(s) \coloneqq \sum_{\substack{a\in\mathcal{T}_1\\ \mathsf{s}(a)=s}} f(a) - \sum_{\substack{a\in\mathcal{T}_1\\ \mathsf{t}(a)=s}} f(a).$$

On note $\Delta^+\colon \mathcal{J}_1^{\lambda,+} \to \mathcal{J}_0^{\lambda,+}$ sa restriction à $\mathcal{J}_1^{\lambda,+}$. Le lemme suivant découle immédiatement du lemme 2.12 et de l'expression (2.3) de ∂ :

Lemme 2.13. — *Pour $i = 0, 1$, on a des isomorphismes L-linéaires topologiques G-équivariants*

$$(\mathcal{J}_i^\lambda)' \cong \mathcal{I}_i^\lambda.$$

De plus, sous ces isomorphismes, $\Delta' = \partial$.

Proposition 2.14. — *Le laplacien*

$$\Delta^{(+)}\colon \mathcal{J}_1^{\lambda,(+)} \xrightarrow{\Delta^{(+)}} \mathcal{J}_0^{\lambda,(+)},$$

est un morphisme strict surjectif, et de plus :

- $\ker\Delta \cong (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$,
- $(\ker\Delta^+)\otimes_{\mathrm{O}_L} L \cong \mathscr{D}^\lambda$*, i.e.* $\ker\Delta^+$ *définit un réseau de* $\mathscr{D}^\lambda$.

Démonstration. — Pour la première partie de la proposition, on peut supposer $\lambda = (0, 1)$, quitte à utiliser une base de W_λ et raisonner suivant les coordonnées.

On commence par montrer que Δ est strict pour la topologie faible et donc strict pour la topologie de Fréchet. Soit $s \in \mathcal{T}_0$ et p_s la semi-norme associée, pour $a \in \mathcal{T}_1$, on note de même p_a la semi-norme associée. Alors

$$p_s(\Delta(f)) \leqslant \sum_{\substack{a\in\mathcal{T}_1\\ \mathsf{t}(a)=s}} |f(a)| - \sum_{\substack{a\in\mathcal{T}_1\\ \mathsf{s}(a)=s}} |f(a)| \leqslant 2(p+1)\sup_{\substack{a\\ s\in a}} p_a(f)$$

où le sup se prend sur l'ensemble fini des arêtes voisines de s. Ainsi Δ est strict et en particulier d'image fermée (de même pour Δ^+).

Comme $\Delta' = \partial$ par le lemme 2.13, la surjectivité de Δ est une conséquence du lemme 2.12 et de l'injectivité de ∂. On donne une preuve différente, en particulier pour avoir la surjectivité de Δ^+. Comme on vient de montrer que l'image est fermée il suffit de montrer que son image contient une partie dense. Soit $s \in \mathcal{T}_0$, on choisit une suite d'arêtes $\{a_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_1$ telles que $\mathsf{s}(a_0) = s$, et pour tout $n \geqslant 0$, $\mathsf{t}(a_n) = \mathsf{s}(a_{n+1})$ (*i.e.* les a_n forment une chaine partant de s). Posons alors

$$f_s \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} \delta_{a_n}.$$

où pour une arête $a \in \mathcal{T}_1$ (*resp.* un sommet $s \in \mathcal{T}_0$), on note δ_a le dirac en a (δ_s le dirac en s). On a alors $\Delta f_s = \delta_s$. Par linéarité, les sommes finies de diracs sont dans l'image et comme ce sous-espace est dense, on a montré que Δ est surjectif (de même[14] pour Δ^+).

Montrons que $\ker\Delta \cong (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$ ce qu'il suffit de faire pour $\lambda = (0, 1)$ quitte à tensoriser par W_λ. C'est alors un résultat classique sur les cochaînes harmoniques pour lequel on renvoie à [**1**, Theorem 1.1] (*cf.* aussi [**28**, Lemme 12.4]).

Comme on sait que $\mathscr{D}^\lambda$ s'identifie aux vecteurs G-bornés de $(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})'$ (*cf.* lemme 2.6), le dernier point est une conséquence du point 3 du lemme 2.12.

□

On termine maintenant la preuve de la proposition 2.9.

[14] Remarquons que l'image de Δ^+ est fermée parce que c'est l'image d'un compact par une application continue.

Démonstration. — On commence par montrer que le conoyau de $\mathcal{I}_0^\lambda \xrightarrow{\partial} \mathcal{I}_1^\lambda$ est isomorphe à $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$. D'après la proposition 2.14 on a une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}})' \to \mathcal{J}_1^\lambda \xrightarrow{\Delta} \mathcal{J}_0^\lambda \to 0$$

à laquelle on applique le L-dual stéréotypique pour obtenir par le lemme 2.12

$$0 \to \mathcal{I}_0^\lambda \xrightarrow{\partial} \mathcal{I}_1^\lambda \to \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \to 0.$$

De même, on considère

$$0 \to \mathscr{D}^\lambda \to \mathcal{J}_1^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \xrightarrow{\Delta} \mathcal{J}_0^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \to 0,$$

dont le dual par le lemme 2.12 donne

$$0 \to \widehat{\mathcal{I}}_0^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \xrightarrow{\Delta} \widehat{\mathcal{I}}_1^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} L \to \mathscr{C}^\lambda \to 0.$$

Ainsi $I^{\lambda,+} \coloneqq \mathrm{Coker}\,\partial^+$ définit un O_L-réseau stable par G de $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ dont le complété p-adique est un O_L-réseau G-stable de $\mathscr{C}^\lambda$. □

2.2. Déformations infinitésimales de $V_{\mathcal{L}}^\lambda$. — Soit $\lambda \in P$ tel que $w(\lambda) > 1$, on pose $D = \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$; et, pour $n \geqslant 0$, $L_n \coloneqq L[T]/T^{n+1}$. Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$.

2.2.1. $\mathcal{L} \neq \infty$. — Le cas $\mathcal{L} \neq \infty$ est très similaire au cas cuspidal (*cf.* [**11**]). On pose

$$D_{\mathrm{dR}} \coloneqq (\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} M)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = Le_1 \oplus Le_0.$$

Soit $n \geqslant 0$ un entier, $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ désigne le L_n-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module filtré défini par $D_{\mathcal{L},n}^\lambda = L_n \otimes_L \mathrm{Sp}_L(|\lambda| - 2)$ en tant que L_n-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module et tel que $(\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathcal{L},n}^\lambda)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L_n \otimes_L D_{\mathrm{dR}}$ est muni de la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathcal{L},n}^\bullet$ définie par

$$\mathrm{Fil}_{\mathcal{L},n}^i \coloneqq \begin{cases} L_n \otimes_L D_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leqslant -\lambda_2 + 1 \\ L_n \otimes_L (e_1 - (\mathcal{L} + T)e_0) & \text{si } -\lambda_2 + 2 \leqslant i \leqslant -\lambda_1 + 1 \\ 0 & \text{si } i \geqslant -\lambda_1 + 2 \end{cases}$$

Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $T^k D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est isomorphe à $D_{\mathcal{L},n-k}^\lambda$ comme L-(φ, N)-module filtré.

Lemme 2.15. — *Soit $n \geqslant 0$.*

1. *Le L_n-(φ, N)-module filtré $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est faiblement admissible.*
2. *Les seuls sous L-(φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles de $D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ sont les $T^k D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Démonstration. — La preuve est très similaire à celle de [**11**, Lemme 4.3] avec une petite différence puisque $D_{\mathcal{L}}^\lambda$ n'est pas irréductible comme L-(φ, N)-module. Posons $w \coloneqq w(\lambda)$. Soit $S \subset D_{\mathcal{L},n}^\lambda$ un sous-L-(φ, N)-module. Alors S est de la forme $S = \Lambda_0 e_0 \oplus \Lambda_1 e_1$ où Λ_1 et Λ_0 sont des L-sous-espaces vectoriels de L_n tels que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$, puisque S est stable par N. Notons $d_i \coloneqq \dim_L \Lambda_i$ pour $i = 0, 1$, on a donc $d_1 \leqslant d_0$. Comme la filtration n'a que deux crans, en simplifiant l'inégalité des pentes, le premier point revient à montrer

$$w \dim_L(S \cap \mathrm{Fil}_{\mathcal{L},n}^{-\lambda_1}) \leqslant d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2},$$

et le second point à montrer que, si l'inégalité est une égalité, alors $\Lambda_1 = \Lambda_0 \cong T^k L_n$ pour $k \geqslant 0$. Or, $S \cap \mathrm{Fil}_{\mathcal{L},n}^{-\lambda_1}$ est constitué d'éléments de la forme $Pe_1 + (\mathcal{L} + T)Pe_0$ où $P \in \Lambda_1$ et $(\mathcal{L} + T)P \in \Lambda_0$. En particulier :

$$w \dim_L(S \cap \mathrm{Fil}_{\mathcal{L}}^{-\lambda_1}) \leqslant d_1 w = d_1 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2} \leqslant d_0 \frac{w-1}{2} + d_1 \frac{w+1}{2}.$$

Cela conclut la preuve du premier point. Pour le second point, il est clair que si l'on a égalité, alors $d_1 = d_0$, c'est-à-dire que $\Lambda \coloneqq \Lambda_0 = \Lambda_1$ et donc $S = \Lambda \otimes_L \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$. Dans ce cas, pour un élément $Pe_1 + (\mathcal{L}+T)Pe_0 \in S \cap \mathrm{Fil}_{\mathcal{L}}^{-\lambda_1}$ on a $(\mathcal{L}+T)P \in \Lambda$, donc $TP \in \Lambda$, c'est-à-dire que $\Lambda \subset L_n$ est un idéal car il est stable par T, *i.e.* il existe $k \geqslant 0$ tel que $\Lambda = T^k L_n$. □

2.2.2. $\mathcal{L} = \infty$. — Le cas $\mathcal{L} = \infty$ est différent du précédent : plutôt que de déformer la filtration, on déforme l'opérateur de monodromie *et* le frobenius. Posons

$$\mathbb{L}_\infty := L[\![T_1, T_2]\!]/\langle T_1T_2\rangle,$$
$$\mathbb{L}_{\mathbf{n}} := L[\![T_1, T_2]\!]/\langle T_1^{n_1+1}, T_2^{n_2+1}\rangle,\ \mathbf{n} := (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$$

On pose comme précédemment

$$D_{\mathrm{dR}} := (\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} M)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = Le_1 \oplus Le_0.$$

Soit $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ une paire d'entiers positifs et $k \in \mathbb{Z}$, on définit $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathbf{n}}(k) = \mathbb{L}_{\mathbf{n}}e_0 \oplus \mathbb{L}_{\mathbf{n}}e_1$ le $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-(φ, N)-module par les formules

$$\begin{cases}\varphi(e_1) = p^{-\frac{k-1}{2}}(1-T_1)e_1\\ \varphi(e_0) = p^{-\frac{k+1}{2}}(1-T_1)^{-1}e_0,\end{cases} \qquad \begin{cases}Ne_1 = T_2e_0\\ Ne_0 = 0.\end{cases}$$

On doit vérifier la relation $p\varphi N = N\varphi$ qui, appliquée à e_0, est évidente ; appliquée à e_1, donne

$$(p\varphi N - N\varphi)e_1 = p^{-\frac{k+1}{2}}T_2[(T_1+1)^{-1} - (1+T_1)]e_1 = p^{-\frac{k+1}{2}}uT_2T_1e_1 = 0,$$

où $u = 2 + \sum_{i=1}^{n_1} T_1^i \in \mathbb{L}_{\mathbf{n}}^\times$. Cela justifie la relation $T_1T_2 = 0$ dans $\mathbb{L}_\infty$.

Pour $\lambda \in P$, on définit le $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-(φ, N)-module filtré $\mathbb{D}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-(φ, N)-module sous-jacent $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathbf{n}}(|\lambda|-2)$ et dont la filtration est définie par $\mathrm{Fil}_{\infty,n}^\bullet := \mathbb{L}_{\mathbf{n}} \otimes_L \mathrm{Fil}_\infty^\bullet$ sur $(\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\infty,n}^\lambda)^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = L_{\mathbf{n}} \otimes_L D_{\mathrm{dR}}$

Comme précédemment, pour $k_i \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 \leqslant k_i \leqslant n_i$ pour $i = 1, 2$, $T_1^{k_1}T_2^{k_2}D_{\infty,(n_1,n_2)}^\lambda$ est isomorphe à $D_{\infty,(n_1-k_1,n_2-k_2)}^\lambda$ comme L-(φ, N)-module filtré et on a le lemme suivant :

Lemme 2.16. — *Soit* $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.

1. *Le* $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-(φ, N)*-module filtré* $\mathbb{D}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ *est faiblement admissible.*
2. *Les seuls sous* L-(φ, N)*-modules filtrés faiblement admissibles de* $\mathbb{D}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ *sont les* $T_1^{k_1}T_2^{k_2}\mathbb{D}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ *pour* $0 \leqslant k_1 \leqslant n_1,\ 0 \leqslant k_2 \leqslant n_2$.

Démonstration. — La preuve est très proche de celle du lemme 2.15. Soit $S \subset \mathbb{D}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ un sous-L-(φ, N)-module. Alors $S = \Lambda_0e_0 \oplus \Lambda_1e_1$ avec Λ_0, Λ_1 des L-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. Comme S est stable par N, $T_2\Lambda_1 \subset \Lambda_0$ et comme S est stable par φ, $(1-T_1)\Lambda_1 \subset \Lambda_1$ et $(1-T_1)^{-1}\Lambda_0 \subset \Lambda_0$ ce qui implique que Λ_0 et Λ_1 sont stables par T_1. Soit $d_i := \dim_L \Lambda_i$ pour $i = 0, 1$ et $d := \dim_L(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)$, notons que $d \leqslant d_0, d_1$.

Comme la filtration n'a que deux crans, on peut simplifier l'inégalité des pentes comme dans la preuve du lemme 2.15 ; le premier point revient donc à montrer

$$w \dim_L(S \cap \mathrm{Fil}_{\infty,\mathbf{n}}^{-\lambda_1}) \leqslant d_0\frac{w-1}{2} + d_1\frac{w+1}{2},$$

et le second point à montrer qu'en cas d'égalité, $\Lambda_0 = \Lambda_1 = T_1^{k_1}T_2^{k_2}\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. Or, $S \cap \mathrm{Fil}_{\infty,\mathbf{n}}^{-\lambda_1}$ est constitué d'éléments de la forme $Pe_1 + Pe_0$ où $P \in \Lambda_1 \cap \Lambda_0$ et donc

$$w \dim_L(S \cap \mathrm{Fil}_{\infty,\mathbf{n}}^{-\lambda_1}) = wd = d\frac{w-1}{2} + d\frac{w+1}{2} \leqslant d_0\frac{w-1}{2} + d_1\frac{w+1}{2}. \tag{2.4}$$

Cela conclut la preuve du premier point. Pour le second point, il est clair que si l'on a égalité dans (2.4), alors $d = d_0 = d_1$ et donc $\Lambda := \Lambda_0 = \Lambda_1$. Dans ce cas, comme $T_2\Lambda \subset \Lambda$, Λ est stable par T_2 et on a déjà montré que Λ est stable par T_1 donc c'est un idéal de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$, *i.e.* il existe $k_1, k_2 \geqslant 0$ tels que $\Lambda = T_1^{k_1}T_2^{k_2}\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$. □

Pour $n \geqslant 0$ un entier, on définit $D^\lambda_{\infty,n} \coloneqq \mathbb{D}^\lambda_{\infty,n}/T_1\mathbb{D}^\lambda_{\infty,n}$ comme L_n-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module filtré par l'isomorphisme $L_n \cong L[\![T_2]\!] = \mathbb{L}_\infty/T_1$; on définit de même $D^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n} \coloneqq \mathbb{D}^\lambda_{\infty,n}/T_2\mathbb{D}^\lambda_{\infty,n}$ comme L_n-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-module filtré par l'isomorphisme $L_n \cong L[\![T_1]\!] = \mathbb{L}_\infty/T_2$. Pour $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}$, on a un diagramme cartésien de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p})$-modules filtrés

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}} \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & D^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n_1} \arrow[d] \\ D^\lambda_{\infty,n_2} \arrow[r] & D^\lambda_\infty \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

2.2.3. *Déformations.* — On rappelle le lemme suivant (*cf.* [**16**, Proposition 7.17]) :

Lemme 2.17. — *Soit $\lambda \in P$ et $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^1(L) = L \cup \{\infty\}$.*

1. *Pour $\mathcal{L} \neq \infty$, le sous-L-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V^\lambda_{\mathcal{L}}, V^\lambda_{\mathcal{L}})$ des extensions de Rham de déterminant $\zeta_\lambda\omega$ est de dimension 1.*
2. *Le sous-L-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V^\lambda_\infty, V^\lambda_\infty)$ des extensions de Rham de déterminant $\zeta_\lambda\omega$ est de dimension 2.*

Remarque 2.18. — Dans la preuve de la proposition [**16**, Proposition 7.17] il apparaît en outre que, dans le cas exceptionnel, le sous-espace des extensions cristallines de déterminant $\zeta_\lambda\omega$, est de dimension 1 (ou de manière équivalente, le sous-espace des extensions semi-stables de déterminant $\zeta_\lambda\omega$ des extensions W telles que $N \neq 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(W)$, est de dimension 1). On le déduit aussi de l'existence de la déformation $\mathbb{V}^\lambda_{\infty,(1,1)}$.

Pour $n \geqslant 0$ et $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose pour $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$

$$V^\lambda_{\mathcal{L},n} \coloneqq \mathbf{V}_{st}(D^\lambda_{\mathcal{L},n}[1]), \quad \mathbb{V}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}} \coloneqq \mathbf{V}_{st}(\mathbb{D}^\lambda_{\mathcal{L},\mathbf{n}}[1]), \quad V^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n} \coloneqq \mathbf{V}_{st}(D^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n}[1]).$$

Comme le foncteur $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ est exact, il préserve les limites finies et le diagramme cartésien 2.5 donne un diagramme cartésien de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}} \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & V^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n_1} \arrow[d] \\ V^\lambda_{\infty,n_2} \arrow[r] & V^\lambda_\infty \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Soit $\mathcal{B}$ le bloc correspondant à la réduction(15) de $V = V^\lambda_{\mathcal{L}}$ et posons $R \coloneqq R^{\mathrm{ps},\zeta_\lambda}_{\mathcal{B}}[1/p]$. Alors V définit un idéal maximal $\mathfrak{m}^\lambda_{\mathcal{L}} \subset R$. Soit $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ le complété $\mathfrak{m}^\lambda_{\mathcal{L}}$-adique de R. Cet anneau est muni d'une représentation universelle $\widehat{\rho}_{\mathcal{L}} \colon \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\widehat{R}_{\mathcal{L}})$.

Soit maintenant $\widehat{R}_{\mathcal{L},\mathrm{dR}}$ le quotient de $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ classifiant les représentations de Rham, *i.e.* $\widehat{R}_{\mathcal{L},\mathrm{dR}} \coloneqq \widehat{R}_{\mathcal{L}}/I$ où $I = \cap\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux de $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ tels que $\widehat{R}_{\mathcal{L}}/\mathfrak{a}$ soit de dimension finie sur L et $(\widehat{R}_{\mathcal{L}}/\mathfrak{a}) \otimes \widehat{\rho}_{\mathcal{L}}$ soit de Rham.

Proposition 2.19. — *Pour $\mathcal{L} \neq \infty$, on a $\widehat{R}_{\mathcal{L},\mathrm{dR}} \cong L_\infty$ et $\widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}/T_2 \cong \widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}/T_1 \cong L_\infty$*

Démonstration. — Supposons d'abord que $\mathcal{L} \neq \infty$, la preuve est alors la même que celle de [**11**, Proposition 4.5]. En effet, d'après le premier point du lemme 2.17, $V^\lambda_{\mathcal{L},1}$ est l'unique extension non triviale de $V^\lambda_{\mathcal{L}}$ par $V^\lambda_{\mathcal{L}}$ qui est de déterminant $\zeta_\lambda\omega$ et qui soit de de Rham. On en déduit que $\widehat{R}_{\mathcal{L},\mathrm{dR}}$ est un anneau local régulier de dimension 1.

Si $\mathcal{L} = \infty$, le second point du lemme 2.17 donne que $\widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}$ est un quotient de $L[\![T_1, T_2]\!]$. Alors $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}/T_1$ est un quotient de L_n et l'existence de $V^\lambda_{\infty,n}$ pour tout $n \geqslant 0$ fournit une suite

(15)Rappelons que la *réduction* d'une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est la semi-simplification de V^+/ϖ_L où $V^+ \subset V$ est un O_L-réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Cette définition est indépendante du réseau V^+, grâce à la semi-simplification.

compatible de morphismes $\widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}/T_1 \to L_n$; ils sont surjectifs puisque $V^\lambda_{\infty,1}$ n'est pas scindé. Le même raisonnement pour $\widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}/T_2$ donne le résultat. □

Proposition 2.20. — *On a* $\widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}} \cong \mathbb{L}_\infty = L[\![T_1,T_2]\!]/\langle T_1T_2\rangle$.

Démonstration. — On note $R = \widehat{R}_{\infty,\mathrm{dR}}$, $D := D_{\mathrm{st}}(\widehat{\rho}_{\infty,\mathrm{dR}})$ le R-(φ,N)-module filtré de la déformation infinitésimale universelle $\widehat{\rho}_{\infty,\mathrm{dR}} \colon \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(R)$ et φ_D le frobenius sur D. Notons que D est un R-module libre de rang 2. On veut montrer qu'il existe un morphisme $\mathbb{L}_\infty \to R$ tel que $\mathbb{D}^\lambda_\infty \otimes_{\mathbb{L}_\infty} R \cong D$. Rappelons que R est un quotient de $\mathbb{L}[\![T_1,T_2]\!]$ et notons

$$\mathbb{D}_1 := \varprojlim_{\mathbf{n}} \mathbb{D}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}}/T_2, \quad \mathbb{D}_2 := \varprojlim_{\mathbf{n}} \mathbb{D}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}}/T_1;$$

ils définissent des L_∞-(φ,N)-modules. D'après la proposition 2.19, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & R_1 \cong L[\![T_1]\!] \arrow[d] \\ R_2 \cong L[\![T_2]\!] \arrow[r] & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & D_1 \cong \mathbb{D}_1 \arrow[d] \\ D_2 \cong \mathbb{D}_2 \arrow[r] & D^\lambda_\infty \end{tikzcd}$$

Soient $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1$ des relèvements de $e_0, e_1 \in \mathbb{D}_1$; d'après le lemme de Nakayama

$$D = R\tilde{e}_0 \oplus R\tilde{e}_1.$$

Comme D est de rang 2 sur R et que $N \neq 0$ sur son quotient D_2, on sait que $N \neq 0$ et $N^2 = 0$ sur D, donc, d'après le lemme de Nakayama, $\ker N = R\tilde{e}_0$. Comme $\ker N$ est stable par φ_D, on obtient $u \in L[\![T_1,T_2]\!]^\times$ tel que $\varphi_D(\tilde{e}_0) = u\tilde{e}_0$. De plus, il existe $P \in L[\![T_1,T_2]\!]$ tel que $N\tilde{e}_1 = T_2P\tilde{e}_0$ puisque $N \equiv 0 \mod T_2$. Alors, $\varphi_D(\tilde{e}_1) = \beta\tilde{e}_1 + \gamma\tilde{e}_0$ et quitte à faire le changement de base $\tilde{e}_1 \leftrightarrow \tilde{e}_1 - \gamma u^{-1}\tilde{e}_0$, on peut supposer que $\gamma = 0$ et $\beta = pu^{-1}$.

Pour résumer, on a justifié que $D = R\tilde{e}_0 \oplus R\tilde{e}_1$, $u \in L[\![T_1,T_2]\!]^\times$ et $P \in L[\![T_1,T_2]\!]$ tels que

$$\begin{cases} \varphi_D(\tilde{e}_1) = pu^{-1}\tilde{e}_1 \\ \varphi_D(\tilde{e}_0) = u\tilde{e}_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N\tilde{e}_1 = PT_2\tilde{e}_0 \\ N\tilde{e}_0 = 0 \end{cases}$$

Montrons que $v = (u - u^{-1}) \in T_1R^\times$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $v \equiv 2T_1 \mod \langle T_1^2, T_2\rangle$; or, on a $v \equiv (1-T_1) - (1-T_1)^{-1} \equiv 2T_1 \mod \langle T_1^2, T_2\rangle$. Ainsi, on obtient

$$(p\varphi_D N - N\varphi_D)\tilde{e}_1 \in T_1T_2PR^\times,$$

et donc R est un quotient de $R' := L[\![T_1,T_2]\!]/\langle T_1T_2P\rangle$. Enfin, le morphisme $\mathbb{L}_\infty \to R'$ défini par $T_1 \mapsto T_1$ et $T_2 \mapsto PT_2$ est tel que $\mathbb{D}^\lambda_\infty \otimes_{\mathbb{L}_\infty} R \cong D$. □

2.3. Déformations infinitésimales de $\Pi^\lambda_{\mathcal{L}}$. — Pour $n \geqslant 0$ et $\mathbf{n} = (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose pour $\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\}$

$$\Pi^\lambda_{\mathcal{L},n} := \mathbf{\Pi}(V^\lambda_{\mathcal{L},n}), \quad \mathbf{\Pi}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}} := \mathbf{\Pi}(\mathbf{V}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}}), \quad \Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n} := \mathbf{\Pi}(V^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n}).$$

À partir du diagramme cartésien (2.5), un diagramme de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-représentations de G

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Pi}^\lambda_{\infty,\mathbf{n}} \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & \Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n_1} \arrow[d] \\ \Pi^\lambda_{\infty,n_2} \arrow[r] & \Pi^\lambda_\infty \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Remarque 2.21. — Il n'est pas immédiat que ce diagramme est cartésien puisque $\mathbf{\Pi}$ n'est pas exact au sens strict du terme. Il est sûrement possible de montrer qu'il l'est à partir de 2.6 en appliquant $\mathbf{V}$ au diagramme 2.7 et en se ramenant à des représentations Π qui satisfont $\mathbf{\Pi} \circ \mathbf{V}(\Pi) = \Pi$.

2.3.1. *Vecteurs localement algébriques.* — Dans ce paragraphe on calcule les vecteurs localement algébriques de $\Pi^{\lambda}_{\mathcal{L},n}$ et $\mathbf{\Pi}^{\lambda}_{\infty,\mathbf{n}}$. On commence par rappeler la proposition suivante (*cf.* [**11**, Théorème 4.1]) :

Proposition 2.22. — *Soit E une algèbre locale de corps résiduel L et V une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de rang 2 sur E qui est absolument irréductible. Alors $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lalg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si V est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts.*

Rappelons que[16]

$$ {}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\mathcal{L}} = \begin{cases} \mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} & \mathcal{L} \neq \infty, \\ \widetilde{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} & \mathcal{L} = \infty, \end{cases} $$

où $\widetilde{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda}$ est l'unique extension de W^*_{λ} par $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda}$. Notons que $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda}$ est dense dans ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\infty}$ puisque cette représentation est un quotient de $\mathscr{C}^{\lambda}$ d'après la proposition 2.8.

Lemme 2.23. — *1. Si $n \geqslant 0$ est un entier et $\mathcal{L} \neq \infty$ alors*

$$ {}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\mathcal{L},n} \cong \mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} \otimes_L L_n. $$

2. Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ alors on a un diagramme commutatif de $\mathbb{L}_{\mathbf{n}}$-représentations de G

$$ \begin{tikzcd} {}^{\mathrm{lalg}}\mathbf{\Pi}^{\lambda}_{\infty,\mathbf{n}} \arrow[r, "\mathrm{mod}\ T_2"] \arrow[d, "\mathrm{mod}\ T_1"'] & {}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n_1} \arrow[d] \\ {}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\infty,n_2} \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} \end{tikzcd} \tag{2.8} $$

où ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\infty,n_2} \cong \widetilde{\mathrm{St}}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} \otimes_L L_n$.

Démonstration. — Pour le premier point, la preuve se fait comme [**11**, Remarque 4.7 (i)] que l'on rappelle brièvement. D'après [**11**, Remarque 4.2 (ii)], si Π est une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphes à Π_0 et Π_0^{lalg} est irréductible et dense dans Π_0 alors Π^{lalg} est dense dans Π si et seulement si $\mathrm{lg}(\Pi) = \mathrm{lg}(\Pi^{\mathrm{lalg}})$, ce qui permet d'obtenir le résultat grâce à 2.22.

Pour le second point, on commence par calculer ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda}_{\infty,n_2}$, ce qui se fait comme précédemment en adaptant [**11**, Remarque 4.2 (ii)] de la façon suivante : si Π est une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphes à Π_0 et Π_0^{lalg} est de longueur 2 et dense dans Π_0 alors Π^{lalg} est dense dans Π si et seulement si $2\,\mathrm{lg}(\Pi) = \mathrm{lg}(\Pi^{\mathrm{lalg}})$. On adapte alors la fin de l'argument de [**11**, Remarque 4.7 (i)] pour conclure la preuve.

□

Remarque 2.24. —

- Notons que le diagramme (2.8) est cartésien si (2.7) est cartésien puisque prendre les vecteurs localement algébriques (et les vecteurs localement analytiques) est un foncteur exact à gauche donc commute aux limites finies.
- Si l'on disposait du résultat en famille des vecteurs localement algébriques dans la série principale analogue à [**8**, Théorème 0.9] on obtiendrait que

$$ {}^{\mathrm{lalg}}\Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n_1} \cong \mathrm{Ind}_B^G(|x|_p(1-T_1)^{v_p(x)} \otimes_L |x|_p^{-1}(1-T_1)^{-v_p(x)})^{\infty} \otimes_L W^*_{\lambda}. $$

Ce résultat devrait découler des mêmes calculs à partir de [**21**]. Le lemme suivant serait une conséquence immédiate de ce calcul mais nous en proposons une preuve différente.

Lemme 2.25. — *Soit $n \in \mathbb{N}$, tout morphisme $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} \to \Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n}$ se factorise par*

$$ \mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_{\lambda} \to T_1^n \Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n} \hookrightarrow \Pi^{\lambda,\mathrm{cr}}_{\infty,n}. $$

[16] En raison des nombreuses décorations autour de Π, on s'autorise à placer l'exposant ≪ lalg ≫en pré-exposant.

Démonstration. — Rappelons que $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est un quotient de

$$B_\lambda^{\mathrm{lalg}} := \mathrm{Ind}_B^G(x^{\lambda_1} \otimes x^{\lambda_2-1})^{\mathrm{lalg}} \otimes_L |\det|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}.$$

Notons δ le caractère de T défini par $\delta(\mathrm{diag}(x_1,x_2)) := x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2-1}|x_1x_2|^{\frac{|\lambda|-1}{2}}$. Par la réciprocité de Frobenius, on se ramène à montrer que toute application $\delta \to \Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}}$ B-équivariante se factorise par $T_1^n\Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}}$. Pour cela, il suffit de démontrer que

(2.9) Les valeurs propres de l'action de $g_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}}$ sont dans $(1-T_1)^{\pm 1}L_n$

Cela signifie que si l'on note v l'image de $\delta \to {}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}}$ on a une décomposition $v = v_+ + v_-$ telle que $g_pv_\pm \in (1-T_1)^{\pm 1}\cdot Lv_\pm$. Ainsi, si (2.9) est vérifiée, comme $g_p\cdot v_\pm \in Lv_\pm$ par hypothèse, $Lv_\pm = (1-T_1)^{\pm 1}Lv_\pm$ et donc $v \in T_1^n\Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}}$.

Pour démontrer (2.9) on utilise le fait que ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{\infty,n}^{\lambda,\mathrm{cr}} \cong (\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^{\mathscr{U}(\mathfrak{g})-\mathrm{finie}} \subset \Delta_{\mathrm{dif}}^-$ en tant que L_n-représentation de B, comme dans la preuve de [**11**, Théorème 4.2]. L'action de g_p est alors donnée par φ, d'après [**7**, Proposition I.3.6]. On en déduit (2.9) puisque les valeurs propres de φ sont dans $(1-T_1)^{\pm 1}L_n$. □

Corollaire 2.26. — *1. Pour $n \geqslant 0$ un entier, la représentation $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est un quotient de $\mathscr{C}^\lambda$.*

2. Pour $\mathbf{n} = (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2$, si $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \to \mathbf{\Pi}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ est un morphisme d'image dense, alors $n_1 = 0$.

Démonstration. — Pour le premier point, par la proposition 2.8, il suffit de construire une inclusion $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \hookrightarrow \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ d'image dense. Comme $V_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est de Rham, d'après la proposition 2.22, ${}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda \hookrightarrow \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ est d'image dense. Par le lemme 2.23 et l'irréductibilité de $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$, on obtient

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}, {}^{\mathrm{lalg}}\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda) \cong L_n$$

On choisit $f\colon \mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \to \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ correspondant à $\lambda \in L_n^\times$ dont la projection sur $(\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda/T)^{\mathrm{lalg}}$ est non nulle ; elle est donc injective et dense dans $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda/T$. On en déduit que l'image de f est dense dans $\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ car ses seules sous-L-représentations (topologiques) de G sont les $T^k\Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pour le second point, supposons que l'on ait un morphisme $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \to \mathbf{\Pi}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda$ d'image dense et montrons que $n_1 = 0$. D'après la proposition 2.8, on a une suite de surjections $\mathscr{C}^\lambda \twoheadrightarrow \mathbf{\Pi}_{\infty,\mathbf{n}}^\lambda \twoheadrightarrow \Pi_{\infty,n_1}^{\lambda,\mathrm{cr}}$. Alors, d'après la proposition 2.8 on a un morphisme injectif $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \hookrightarrow \Pi_{\infty,n_1}^{\lambda,\mathrm{cr}}$ d'image dense. Ainsi, d'après le lemme 2.25, $n_1 = 0$. □

2.3.2. *Complétés de longueur finie de* $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$

Proposition 2.27. — *Soit $\lambda \in P$ tel que $w(\lambda) > 1$. Soit Π une L-représentation unitaire de G de caractère central ζ_λ muni d'un morphisme $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}} \to \Pi$ d'image dense telle que les composantes de Jordan-Hölder*[17] *de Π soient toutes $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ avec multiplicité n, pour $\mathcal{L} \in L\cup\{\infty\}$. Alors $\Pi \cong \Pi_{\mathcal{L},n}^\lambda$.*

Démonstration. — La preuve est très similaire à [**11**, Proposition 4.8]. On rappelle brièvement l'argument.

Soit $J_{\mathcal{L}}$ l'enveloppe injective de $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ dans la catégorie des limites inductives des L-représentations unitaires de G. Alors $\mathrm{End} J_{\mathcal{L}} = \widehat{R}_{\mathcal{L}}$ d'après [**26**, Corollary 6.26] et comme le bloc de $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$ dans la catégorie des représentations unitaires de G n'a qu'un objet (puisque $V_{\mathcal{L}}^\lambda$ est absolument irréductible, *cf.* [**26**, Corollary 6.11]) on a

$$\Pi \cong (\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi') \otimes_{\widehat{R}_{\mathcal{L}}} J'_{\mathcal{L}})'.$$

Comme $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est dense dans Π, Π^{lalg} est dense dans Π et donc $\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi')$ est en fait un $\widehat{R}_{\mathcal{L},\mathrm{dR}}$-module.

[17] En fait, il suffit de supposer qu'une seule des composantes de Jordan-Hölder soit $\Pi_{\mathcal{L}}^\lambda$.

- Si $\mathcal{L} \neq \infty$ la proposition 2.19 implique que
$$\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi') \cong \bigoplus_{i\in I} L_\infty/T^{n_i}, \quad \Pi \cong \bigoplus_{i\in I} \Pi^\lambda_{\mathcal{L},n_i},$$
où I est un ensemble fini et $n_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I$. Comme dans la preuve de [**11**, Proposition 4.8], en utilisant la densité de $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_\lambda$, on conclut que $|I| = 1$.
- Si $\mathcal{L} = \infty$ la proposition 2.20 implique que
$$\mathrm{Hom}_G(J'_{\mathcal{L}}, \Pi') \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{L}_\infty/\langle T_1^{n_i}, T_2^{m_i}\rangle, \quad \Pi \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbf{\Pi}^\lambda_{\infty,(n_i,m_i)},$$
où I est un ensemble fini et $(n_i, m_i) \in \mathbb{N}^2$ pour tout $i \in I$. Comme précédemment on conclut que $|I| = 1$ ce qui donne que $\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_\lambda$ est dense dans $\Pi \cong \mathbf{\Pi}^\lambda_{\infty,(n,m)}$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et donc $n = 0$ d'après le point 2 du corollaire 2.26. Donc $\Pi \cong \Pi^\lambda_{\infty,m}$.

□

2.4. Complétion $\mathcal{B}$-adique et anneaux de Kisin

2.4.1. *Définitions.* — Rappelons que (*cf.* [**11**, §2.1]) si X est un $\mathrm{O}_L[G]$-module topologique, on définit $X_{\mathcal{B}}$, *le complété $\mathcal{B}$-adique de* X, comme la limite inverse des quotients de X appartenant à $\mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}G$. Le complété profini $\widehat{X}$ de X admet une décomposition
$$\widehat{X} = \prod_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}},$$
où $\mathcal{B}$ décrit l'ensemble des blocs des k_L-représentations de G. On appelle dans ce cas $X_{\mathcal{B}}$ le *complété $\mathcal{B}$-adique de* X. En particulier, on note $I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$ le complété $\mathcal{B}$-adique de $I^{\lambda,+}$ *cf.* proposition 2.9). On a
$$\widehat{I}^{\lambda,+} = \prod_{\mathcal{B}} I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}},$$
et on pose $\mathscr{C}^\lambda_{\mathcal{B}} := I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{O}_L} L$.

On écrit $I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}} = \varprojlim_i \Pi_i^+$ où les $\Pi_i^+ \in \mathrm{Tors}^{\zeta_\lambda}_{\mathcal{B}}G$ et on pose
$$\sigma^\lambda_{\mathcal{B}} := (\varprojlim_i \mathbf{V}(\Pi_i^+)) \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$
Par l'isomorphisme du théorème 2.3 $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$ agit sur $I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$, on note $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$ le quotient à travers lequel $R^{\mathrm{ps},\zeta_\lambda}_{\mathcal{B}}$ agit sur $I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$ et on pose $R^\lambda_{\mathcal{B}} := R^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}[1/p]$ (ce sont les *anneaux de Kisin* définis dans l'introduction). Ainsi $\mathscr{C}^\lambda_{\mathcal{B}}$ est un $R^\lambda_{\mathcal{B}}$-module et par la fonctorialité de $\mathbf{V}$, on obtient une action de $R^\lambda_{\mathcal{B}}$ sur $\sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$. Le but de cette sous-section est de montrer que $R^\lambda_{\mathcal{B},M} = T^\lambda_{M,\mathcal{B}}$.

2.4.2. *Propriétés de finitude*

Lemme 2.28. — *Le $R^\lambda_{\mathcal{B}}$-module $\rho^\lambda_{\mathcal{B}}$ est de type fini.*

Démonstration. — On suit la preuve de [**11**, Lemme 5.2]. Il suffit de prouver que $\mathbf{V}(I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}})$ est un $R^+ = R^{\mathrm{ps},\zeta_\lambda}_{\mathcal{B}}$-module de type fini. Par le lemme de Nakayama (topologique), il suffit de montrer que $\mathbf{V}(I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}) \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L$ est de type fini. Or,
$$\mathbf{V}(I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}) \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L = \mathbf{V}(I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L) = \mathbf{V}((I^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L)_{\mathcal{B}}).$$
En effet, pour la première égalité, $I^{\lambda,+}_{\mathcal{B}} = \varprojlim_i \Pi_i^+$ où les morphismes de transition sont surjectifs, alors, en considérant la suite exacte
$$0 \to \Pi_i^+ \xrightarrow{\varpi_L} \Pi_i^+ \to \Pi_i^+ \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L \to 0,$$
à laquelle on applique le foncteur exact $\mathbf{V}$ (*cf.* [**7**, Théorème IV. 2.24]), puis on passe à la limite projective ce qui donne encore une suite exacte puisque $R^1 \lim \mathbf{V}(\Pi_i^+) = 0$ ($\Pi_{i+1}^+ \to \Pi_i^+$ étant

surjectif et $\mathbf{V}$ exacte, $\mathbf{V}(\Pi_{i+1}^{+}) \to \mathbf{V}(\Pi_i^{+})$ est surjectif). L'égalité $I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L = (I^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L)_{\mathcal{B}}$ découle de l'exactitude de la $\mathcal{B}$-complétion (*cf.* [**11**, Corollaire 2.3]).

Par le lemme 2.11, $I^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L$ est de type fini et [**11**, Corollaire 2.2] permet donc de conclure la preuve. $\square$

Lemme 2.29. — *Soit $n \geqslant 0$ un entier, $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta}[1/p]$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel. Le $L_x[G]$-module $\mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est de longueur finie.*

Démonstration. — On note

$$R^{+} \coloneqq R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta}, \quad \Pi_{x,n} \coloneqq \mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}.$$

Par [**13**, Corollary 1.6] il suffit de montrer que $\Pi_{x,n}$ est résiduellement de longueur finie. Soit $\tilde{\mathfrak{n}}_{n,x} \coloneqq R^{+} \cap \mathfrak{m}_x^{n+1}$ et $\mathfrak{n}_{x,n} \subset R^{+}$ l'idéal engendré par $\tilde{\mathfrak{n}}_{x,n}$ et ϖ_L. Comme $I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}/\tilde{\mathfrak{n}}_{n,x}$ définit un réseau de $\Pi_{x,n}$ par la proposition 2.9, il suffit de montrer que $\pi_{x,n} \coloneqq I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}/\mathfrak{n}_{x,n} = \bar{I}_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}/\tilde{\mathfrak{n}}_{x,n}$ est de longueur finie où $\bar{I}_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}$ est la réduction modulo ϖ_L de $I_{\mathcal{B}}^{\lambda,+}$. Rappelons que d'après la preuve du lemme 2.28

$$\bar{I}_{\mathcal{B}}^{\lambda,+} = (I^{\lambda,+} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L)_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi, d'après [**11**, Proposition 2.2], comme $I^{\lambda,+}/\varpi_L$ est de type fini par le lemme 2.11, on obtient

$$\bar{I}_{\mathcal{B}}^{\lambda,+} \cong (P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{\zeta}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}^{\zeta}, (I^{\lambda,+}/\varpi_L)^{\vee}))^{\vee}. \tag{2.10}$$

où $P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \coloneqq \bigoplus_{\pi\in\mathcal{B}} P_{\pi}^{\zeta}$ et $E_{\mathcal{B}}^{\zeta} \coloneqq \mathrm{End}(P_{\mathcal{B}})$ où P_{π}^{ζ} est l'enveloppe projective de $\pi^{\vee}$ (définie dans [**24**, §2], *cf.* aussi n° 3.2.1) et $(\ \cdot\ )^{\vee} \coloneqq \mathrm{Hom}_G(\ \cdot\ , L/\mathrm{O}_L)$ est le dual de Pontryagin. Mais d'après [**26**, Corollary 6.7], $P_{\mathcal{B}}^{\zeta}/\mathfrak{n}_{x,n} \cong \pi^{\vee}$ où π est un $\mathrm{O}_L[G]$-module de longueur finie, la formule 2.10 donne, par compacité et projectivité de $P_{\mathcal{B}}^{\zeta}$:

$$\pi_{x,n} \cong (\pi^{\vee} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{\zeta}} \mathrm{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi))^{\vee}.$$

Donc il reste à montrer que $\mathrm{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi)$ est de dimension finie. Rappelons que la décomposition (2.2) définie une surjection $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}\mathrm{st}_{\lambda}^{+} \to I^{\lambda,+}$ qui combinée à la réciprocité de Frobenius donne une injection

$$\mathrm{Hom}_G((I^{\lambda,+}/\varpi_L), \pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{KZ}(\mathrm{st}_{\lambda}^{+}/\varpi_L, \pi) = \mathrm{Hom}_{KZ}(\mathrm{st}_{\lambda}^{+}/\varpi_L, \pi^{K_1}),$$

où la dernière égalité est vérifiée car $K_1 \coloneqq \ker(K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$ agit trivialement sur $\mathrm{st}_{\lambda}^{+}/\varpi_L$. Mais comme π est admissible, π^{K_1} est de dimension finie et comme $\mathrm{st}_{\lambda}^{+}/\varpi_L$ est aussi de dimension finie, on en déduit que $\mathrm{Hom}_G(I^{\lambda,+}/\varpi_L, \pi)$ est de dimension finie, ce qui termine la preuve. $\square$

2.4.3. *La famille universelle.* — Soit $\mathrm{Ban}_{\mathcal{B}}^{\zeta}G$ la catégorie abélienne des L-représentations de Banach unitaires de G, de caractère central ζ, contenant un réseau dont la réduction modulo ϖ_L est dans $\mathcal{B}$. Notons

$$X \coloneqq \mathrm{Spec}\, R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta_\lambda}\big[\tfrac{1}{p}\big], \quad X_{\mathrm{Sp}} \coloneqq \mathrm{Spec}\, R_{\mathcal{B}}^{\lambda}.$$

On pose $U_{\mathcal{B}}^{\lambda} \coloneqq \{\mathcal{L} \in L \cup \{\infty\} \mid \Pi_{\mathcal{L}}^{\lambda} \in \mathrm{Ban}_{\mathcal{B}}^{\zeta_\lambda}G\}$. Alors, de façon équivalente $\mathcal{L} \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ si et seulement si $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}$ a pour réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}$.

Soit $x \in X_{\mathrm{Sp}}$, on note $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ l'idéal maximal associé et $L_x \coloneqq R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x$ son corps résiduel.

Lemme 2.30. — *Pour $n \geqslant 0$ un entier, pour tout $x \in X_{\mathrm{Sp}}$, il existe $\mathcal{L}(x) \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ tel que*

$$\mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \cong \Pi_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda},$$

$$\sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \cong V_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}, \quad \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} (R_{\mathcal{B}}^{\lambda}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \cong V_{\mathcal{L}(x),n}^{\lambda}.$$

En particulier, l'application $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ définit une bijection $X_{\mathrm{Sp}}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \cong U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.

Démonstration. — Notons

$$L_{x,n} := R^\lambda_{\mathcal{B}}/\mathfrak{m}_x^{n+1}, \quad \Pi_{x,n} := \mathscr{C}^\lambda_{\mathcal{B}} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} L_{x,n}, \quad V_{x,n} := \sigma^\lambda_{\mathcal{B}} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} L_{x,n}.$$

Par construction, $\mathrm{St}_\lambda^{\mathrm{lalg}}$ est dense dans $\Pi_{x,n}$ et d'après le lemme 2.29, $\Pi_{x,n}$ est de longueur finie sur L_x donc par [**24**, Theorem 1.11], le bloc de $\mathrm{Ban}^\zeta_{\mathcal{B}} G$ correspondant à $\Pi_{x,n}$ contient une unique représentation de la forme $\Pi^\lambda_{\mathcal{L}(x)}$ pour un certain $\mathcal{L}(x) \in U^\lambda_{\mathcal{B}}$, puisque cette représentation correspond à $V^\lambda_{\mathcal{L}(x)}$ qui est absolument irréductible. Ainsi, par la proposition 2.27, $\Pi_{x,n} \cong \Pi^\lambda_{\mathcal{L}(x),n}$ (l'entier n provient du fait que $\Pi_{x,n}$ est annulé par $\mathfrak{m}_x^{n+1}$). Comme $V_{x,n} = \mathbf{V}(\Pi_{x,n})$ par définition on a $V_{x,n} = V^\lambda_{\mathcal{L}(x),n}$ et d'après [**24**, Theorem 1.11] $\mathbf{V}(\Pi_{x,0}) \cong \rho^\lambda_{\mathcal{B}} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} L_x$ dont on déduit le dernier isomorphisme. Finalement l'injectivité de $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ provient de l'injectivité de $\mathcal{L} \mapsto V^\lambda_{\mathcal{L}}$. □

On obtient alors l'équivalent de [**11**, Théorème 5.4].

Proposition 2.31. —
1. *Le $R^\lambda_{\mathcal{B}}$-module $\sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$ est libre de rang* 2.
2. *Le L-schéma X_{Sp} est lisse, réduit et purement de dimension* 1.
3. *On a* $\det_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} \sigma^\lambda_{\mathcal{B}} = R^\lambda_{\mathcal{B}} \cdot t^{|\lambda|}$.

Démonstration. — Une partie de la preuve est *verbatim* la même que celle de [**11**, Théorème 5.4] (sauf le troisième point et la liberté), dont on rappelle les ingrédients principaux. On note

$$R = R^\lambda_{\mathcal{B}}, \quad \sigma^+ = \sigma^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}, \quad \sigma = \sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$$

et $\widehat{\sigma}_x$ le complété du localisé de σ en $x \in X_{\mathrm{Sp}}$.

D'après le lemme 2.30, $\widehat{\sigma}_x$ est libre de rang 2 sur $L_x[\![T_x]\!]$ et $\mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \widehat{\sigma}_x \cong L_x[\![T_x]\!]$ ce qui donne une injection $R \hookrightarrow \prod_x L_x[\![T_x]\!]$. Ceci montre que R est réduit.

Ensuite, comme σ est de type fini par le lemme 2.28, et $\widehat{\sigma}_x$ est libre de rang 2, on obtient que σ est localement libre de rang 2 sur R. Finalement, cela implique que l'anneau local complété de R en x est $\widehat{R}_x \cong L_x[\![T_x]\!]$, ce qui prouve que X_{Sp} est lisse purement de dimension 1.

Pour le dernier point, notons $N = \det_R \sigma$ qui est un R-module localement libre de rang 1 et $N^+ := \det_{R^+} \sigma^+$. On sait que N^+ est de type fini sur R^+ et $N^+/\varpi_L \cong \det_{k_L} \bar{\rho}_{\mathcal{B}}$. Par le lemme de Nakayama, N^+ est engendré par un élément et donc N est engendré par un élément. Comme N est localement libre de rang 1 et engendré par un élément il est libre de rang 1 sur R. Or, $N \otimes_R L_x \cong L_x t^{|\lambda|}$ on en déduit que $N = R^\lambda_{\mathcal{B}} \cdot t^{|\lambda|}$.

Il reste à justifier que $\sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$ est libre. Comme on vient de montrer que $R^\lambda_{\mathcal{B}}$ est un anneau de Dedekind et que $\det_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} \sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$ est libre, la classification des modules localement libres sur un anneau de Dedekind implique que $\sigma^\lambda_{\mathcal{B}}$ est libre. □

Remarque 2.32. — La même preuve montre que $\rho^\lambda_{\mathcal{B}}$, la famille universelle sur $R^\lambda_{\mathcal{B}}$, est libre de rang 2 et $\det_{R^\lambda_{\mathcal{B}}} \rho^\lambda_{\mathcal{B}} = R^\lambda_{\mathcal{B}} \cdot t^{|\lambda|}$.

2.4.4. *L'ouvert analytique $\mathcal{U}^\lambda_{\mathcal{B}}$.* — On montre maintenant que $U^\lambda_{\mathcal{B}}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$.

Proposition 2.33. — *L'application $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ est la restriction aux points classiques d'une application analytique $f\colon X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Sp}} \to \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$. De plus, f est une immersion ouverte, c'est-à-dire que $U^\lambda_{\mathcal{B}}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $\mathcal{U}^\lambda_{\mathcal{B}} \subset \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$.*

On commence par un lemme plus général, qui est une conséquence de [**2**].

Lemme 2.34. — *Soit A^+ une O_L-algèbre locale complète noethérienne (topologiquement) de type fini, posons $A := A^+[\frac{1}{p}]$ et supposons que A est un anneau de Dedekind. Soit V une A-représentation (continue) de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, telle que*
- *V est libre de rang* 2,

- *pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}_x \subset A$, *dont on note* L_x *le corps résiduel,* $V_x := V \otimes_A L_x$ *est spéciale à poids de Hodge-Tate* λ *i.e.* $V_x \cong V^{\lambda}_{\mathcal{L}(x)}$ *pour* $\mathcal{L}(x) \in \mathbb{P}^1(L_x)$.

Alors :

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \cong A \otimes_L D_{\mathrm{dR}} = Ae_0 \oplus Ae_1$, *en particulier,* $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *est libre de rang* 2 *sur* A,
2. $\mathrm{Gr}_{-\lambda_2}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *est localement libre de rang* 1 *sur* A,
3. *il existe une application analytique* $f\colon (\mathrm{Spec} A)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$ *telle que* $f(x) = \mathcal{L}(x)$ *sur les points fermés.*

Démonstration. — Notons que si les deux premiers points sont vérifiés, on définit l'application f du dernier point par $(D_{\mathrm{dR}} \otimes_L A) \cong \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{Gr}_{-\lambda_2}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Pour le premier point, on commence par montrer que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est localement libre de rang 2 sur A. Pour le second point, il suffit de montrer que $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ est localement libre puisque

$$\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_i\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{Gr}_{-\lambda_2}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \oplus \mathrm{Gr}_{-\lambda_1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

On peut écrire A comme limite projective de L-algèbres affinoïdes $A := \varprojlim_i A_i$. On considère $V_i := V \otimes_A A_i$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) := \varprojlim_i \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i)$ (*resp.* $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V) := \varprojlim_i \mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V_i)$) d'après [**23**, Lemma 4.4] (*resp.* [**23**, Lemma 3.5]) puisque $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i) \cong \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_A A_i$ (*resp.* $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V_i) \cong \mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V) \otimes_A A_i$).

D'après [**2**, Théorème 5.3.2], $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i)$ est un A_i-module localement libre de rang 2 et d'après [**2**, Théorème 5.1.4], $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V_i)$ est un A_i-module localement libre de rang 2. Mais comme

$$\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(V_i) = \mathrm{Gr}_{-\lambda_2}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i) \oplus \mathrm{Gr}_{-\lambda_1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i),$$

on en déduit que $\mathrm{Gr}_{-\lambda_2}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est localement libre de rang 1, ce qui prouve le second point.

Pour conclure la preuve du premier point, comme A est un anneau de Dedekind, par la classification des modules projectifs sur les anneaux de Dedekind, il suffit de montrer que $\det_A \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est libre de rang 1. Or comme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}$ est un foncteur monoïdal symétrique

$$\det{}_A\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\det{}_A V)$$

et comme $\det_A V$ est libre de rang 1, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\det_A V)$ est libre de rang 1.

Finalement, pour $x \in \mathrm{Sp} A_i$ un point classique, comme $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_i)_x \cong \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_x)$ d'après [**2**, Théorème 5.3.2], on a $f(x) = \mathcal{L}(x)$ ce qui finit de prouver le dernier point. $\square$

Remarque 2.35. — Le dernier point du lemme 2.34 peut s'énoncer un peu différemment. On peut construire sur $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-module universel $\mathcal{V}^{\lambda}$ tel que $\mathcal{V}^{\lambda}_x = V^{\lambda}_x$ où x est vu comme un élément de $\mathbb{P}^1(L_x)$. Alors on a $V \cong f^*\mathcal{V}^{\lambda}$.

On peut maintenant conclure la preuve de la proposition 2.33.

Démonstration. — Comme $R^{\lambda}_{\mathcal{B}} = R^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}[\frac{1}{p}]$ où $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B}}$ est un anneau local complet noethérien, les hypothèses du lemme 2.34 sont satisfaites par la proposition 2.31 donc on obtient une application $f\colon X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{Sp}} \to \mathbb{P}^1_L$ et il s'agit de montrer que c'est une immersion ouverte. On va montrer que f est étale et injective sur tous les points avant de conclure en utilisant qu'un morphisme étale et injectif sur les points est une immersion ouverte (*cf.* . [**19**, Lemme I.14]).

Commençons par montrer que f est étale. D'après le lemme 2.30, on sait que f est formellement étale aux points classique, donc f est formellement étale puisque la condition d'être formellement étale est une condition ouverte. De plus, $R^{\lambda}_{\mathcal{B}}$ et $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_L$ sont de présentation finie donc f est de présentation finie. Ainsi, f est étale.

D'après le lemme 2.30, f est injective sur les points classiques, il suffit de montrer que f est injective sur les C-points pour C une extension de $\mathbb{Q}_p$ complète et algébriquement close. Soit $x_1, x_2 := R^{\lambda}_{\mathcal{B}} \to C$. Si $f(x_1) = f(x_2)$ cela signifie que x_1 et x_2 définissent la même filtration sur $D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C$, *i.e.* la même suite exacte

$$0 \to \mathrm{Gr}_{-\lambda_1}(D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C) \to (D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C) \to \mathrm{Gr}_{-\lambda_2}(D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C) \to 0.$$

Par la théorie de Sen, on en déduit des isomorphismes canoniques

$$\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}, x_1} C \cong \mathrm{Gr}_{-\lambda_1}(D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C)(\lambda_1) \oplus \mathrm{Gr}_{-\lambda_2}(D_{\mathrm{dR}} \otimes_L C)(\lambda_2) \cong \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}, x_2} C.$$

Comme $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est la famille universelle sur $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ on en déduit que $x_1 = x_2$. Cela conclut la preuve de la proposition. □

Remarque 2.36. — La preuve de la liberté de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda})$ utilisant le fait que $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ soit un anneau de Dedekind n'est pas très satisfaisante et semble artificielle. Il est possible que pour R un anneau de Kisin plus général (disons pour les représentations de $\mathscr{G}_F$ de dimension n de type cuspidal ou spécial à poids de Hodge-Tate fixés), le $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}$ de la famille universelle soit libre et qu'on puisse en déduire une application de $(\operatorname{Spec} R)^{\mathrm{an}}$ vers une variété de drapeau (partielle) qui soit une immersion ouverte, du moins lorsque M est cuspidal (*cf.* [**29**]).

2.5. Fin de la preuve et corollaires

On obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 2.37. —

1. *On a* $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cong \mathcal{O}(\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda})$ *qui est donc un produit fini d'anneaux principaux.*
2. *Le* $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$*-module* $\rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ *est libre de rang* 2.
3. *On a* $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} = T_{\mathcal{B}}^{\lambda}$*, i.e.* $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} = \mathrm{End}_G \mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.
4. *On a un isomorphisme de* $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$*-modules* $\sigma_{\mathcal{B}}^{\lambda} \cong \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.

Démonstration. — Dans la proposition 2.33 on a montré que $X_{\mathrm{Sp}}^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ ce qui montre le premier point et c'est donc un produit d'anneaux principaux parce que $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est noethérien. Le second point est alors une conséquence de la proposition 2.31.

Pour le troisième point, la preuve est exactement la même que celle de [**11**, Corollaire 5.6], que l'on rappelle brièvement. On a une inclusion immédiate $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \hookrightarrow \mathrm{End}_G \mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, l'autre inclusion revient à considérer $\alpha \in \mathrm{End}_G \mathscr{C}_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ et montrer que $\mathbf{V}(\alpha) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est une homothétie en utilisant que c'en est une modulo $\mathfrak{m}_x$ pour tout $x \in X_{\mathrm{Sp}}$. Ceci donne $\mathbf{V}(\alpha) \in R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ et on conclut en remarquant que $\mathbf{V}(\alpha - \mathbf{V}(\alpha)) = 0$.

Par [**12**, Lemme 5.12] le dernier point est une conséquence immédiate du premier point et du lemme 2.30. □

En suivant mot pour mot la preuve de [**11**, Théorème 5.8] on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.38. — *Soit E une L-algèbre commutative de dimension d et $\rho\colon \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}^{\oplus d}$, est de déterminant ζ_λ, semi-stable à poids de Hodge-Tate λ et* $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\rho) = \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2) \otimes_L E$. *Alors il existe un morphisme $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \to E$ tel que $\rho = E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$.*

Remarque 2.39. — Notons qu'à cause du cas exceptionnel, la réciproque du corollaire est fausse, *i.e.* l'équivalent de [**11**, Corollaire 5.7] est faux dans le cas spécial. En effet, si $\infty \in U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ alors le quotient de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda} \to L$ correspondant à $\mathcal{L} = \infty$ fournit une représentation dont le $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ n'est pas $\mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$. Le corollaire reste vrai si l'on suppose $\infty \notin U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$, on obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.40. — *Soit E un quotient de $R_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ de degré fini sur L, alors $E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de réduction $\bar{\rho}_{\mathcal{B}}^{\oplus [E:\,L]}$, semi-stable à poids de Hodge-Tate λ. De plus, si $\infty \notin U_{\mathcal{B}}^{\lambda}$ alors* $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(E \otimes_{R_{\mathcal{B}}^{\lambda}} \rho_{\mathcal{B}}^{\lambda}) \cong E \otimes_L \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$.

3. Factorisation de la cohomologie étale du système local

Soit $\lambda \in P_+$, $M \in \Phi N_\lambda$ et $\mathcal{B}$ un bloc de $\mathrm{Tors}^{\zeta_M^\lambda} G$. Si M est spécial, supposons que $w(\lambda) > 1$, on renvoie à la remarque 3.3 pour la convention si M est spécial et $w(\lambda) = 1$. On commence par définir le $R^\lambda_{\mathcal{B},M}[G]$-module $\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})'$ comme dans [**12**, Définition 5.14].

Définition 3.1. — Soit $\rho^{\lambda,\triangle}_{\mathcal{B},M}$ un $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}$-réseau $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-stable dans le $R^\lambda_{\mathcal{B},M}$-dual de $\rho^\lambda_{\mathcal{B},M}$. Le dual de Pontryagin de $\rho^{\lambda,\triangle}_{\mathcal{B},M}$ est de la forme $\varinjlim_i V_i$ où les V_i sont des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de rang 2 sur des quotients de $R^{\lambda,+}_{\mathcal{B},M}$. On définit

$$\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})' := \varprojlim_i \mathbf{\Pi}(V_i)' \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R^\lambda_{\mathcal{B},M}$ on a donc

$$\Pi'_x := \mathbf{\Pi}(\rho_x)' \cong L_x \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} \mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})'.$$

Si $\lambda \in P$ et $M \in \Phi N_\lambda$ on définit

$$\mathrm{niv}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \check{G}^1_n \subset \mathrm{Stab}(\mathrm{JL}_M)\},$$

où l'on rappelle que $\check{G}^1_n \subset \check{G}^+_n$ est le noyau de la norme réduite. L'entier $\mathrm{niv}(M)$ est bien défini puisque JL_M est une L-représentation lisse de dimension finie et $\check{G}^1$ est un groupe compact. Pour $n \geqslant 0$ un entier on note $\Phi N^n_\lambda \subset \Phi N_\lambda$ le sous-ensemble des $M \in \Phi N_\lambda$ tels que $\mathrm{niv}(M) \leqslant n$ (notons que ΦN^n_λ est un ensemble fini). Dans toute cette section, on fixe $n \geqslant 0$ un entier, et on choisit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant toutes les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_p$ et telle que tous les JL_M pour $M \in \Phi N^n_\lambda$ soient définis sur L. Le but est de démontrer le résultat de factorisation, *i.e.* le théorème suivant :

Théorème 3.2. — *On a un isomorphisme de $L[\mathbb{G}]$-modules topologiques :*

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathbb{Q}_p}\,;\,\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)\big) = \bigoplus_{\lambda\in P_+}\bigoplus_{M\in\Phi N^n_\lambda}\left(\widehat{\bigoplus_{\mathcal{B}}}\,\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})' \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} \rho^\lambda_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} \check{R}^\lambda_{\mathcal{B},M}\right) \otimes_L \mathrm{JL}^\lambda_M$$

Remarque 3.3. —

- Comme annoncé précédemment, pour les facteurs associés à $\lambda \in P_+$ tels que $w(\lambda) = 1$, le théorème est précisément [**12**] tordu par un caractère. Dans le cas où M est spécial et $w(\lambda) = 1$ (*cf.* quatrième point de la remarque 2.2) la convention pour $\mathcal{B}$ le bloc de la steinberg est $\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M}) := \mathrm{St}^0_L \otimes (\zeta^\lambda_M \circ \det)$ où St^0_L est la steinberg continue à coefficients dans L.
- L'une des difficultés principales dans [**12**] est de démontrer des théorèmes de finitude (*cf.* [**12**, Corollaire 0.12]) pour la cohomologie modulo p. Comme le système local modulo ϖ_{D} se trivialise sur le premier revêtement il n'est pas très difficile, en utilisant la suite spectrale d'Hochschild-Serre, de déduire ces théorèmes dans le cas des coefficients non triviaux (*cf.* n° 3.1.3).

Soit $\lambda \in P_+$, que l'on fixe dans toute la suite. Afin d'alléger les notations, posons

$$\mathrm{H}^\lambda_{\mathbb{Q}_p} := \big(\varprojlim_m \varinjlim_{\substack{K/\mathbb{Q}_p\\ [K:\mathbb{Q}_p]<\infty}} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_K\,;\,\mathbb{V}^+_\lambda(1)/p^m\big)\big) \otimes_{\mathrm{O}_L} L.$$

Par définition et d'après [**28**], on a

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathbb{Q}_p}\,;\,\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)\big) = \bigoplus_{\lambda\in P_+} \mathrm{H}^\lambda_{\mathbb{Q}_p},$$

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_{\mathbb{Q}_p}\,;\,\mathrm{Sym}\mathbb{V}(1)\big) = \bigoplus_{\lambda\in P_+}\bigoplus_{M\in\Phi N^n_\lambda} \mathrm{H}^\lambda_{\mathbb{Q}_p}[M] \otimes_L \mathrm{JL}^\lambda_M.$$

Il suffit donc de montrer que pour $M \in \Phi N_\lambda$ on a un $L[G \times \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-isomorphisme topologique

$$\mathrm{H}^\lambda_{\mathbb{Q}_p}[M] \cong \widehat{\bigoplus_{\mathcal{B}}}(\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},M})' \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} \rho^\lambda_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},M}} \check{R}^\lambda_{\mathcal{B},M}) \tag{3.1}$$

En particulier, pour $M \cong \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$, on obtient :

Corollaire 3.4. — *Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$. Alors*

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big(\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\,;\,\mathbb{V}_\lambda(1)\big) = \widehat{\bigoplus_{\mathcal{B}}}\,\mathbf{\Pi}(\rho^\lambda_{\mathcal{B},\mathrm{Sp}}) \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},\mathrm{Sp}}} \rho^\lambda_{\mathcal{B},\mathrm{Sp}} \otimes_{R^\lambda_{\mathcal{B},\mathrm{Sp}}} \check{R}^\lambda_{\mathcal{B},\mathrm{Sp}}.$$

Comme (3.1) est démontré dans le cas $w(\lambda) = 1$, quitte à tordre par un caractère, on suppose que $w(\lambda) > 1$ dans toute la suite.

3.1. Rappels et compléments de [28]. — On définit

$$\mathrm{H}^{\lambda,+}_C := \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_C\,;\,\mathbb{V}^+_\lambda(1)\big)/\text{torsion}, \quad \mathrm{H}^\lambda_C := \mathrm{H}^{\lambda,+}_C \otimes_{\mathrm{O}_L} L,$$

où l'on sait que la torsion est finie (*cf.* [**28**, Proposition 10.9]).

3.1.1. *Entrelacement.* — On a les théorèmes suivants démontrés dans [**28**] :

Théorème 3.5. — *Soit Π une L-représentation unitaire et absolument irréductible de G sur un espace de Banach,*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \mathrm{H}^\lambda_C\big) \cong \begin{cases} V^\lambda_{M,\mathscr{L}} \otimes_L \mathrm{JL}^\lambda_M & \textit{si } \Pi = \Pi^\lambda_{M,\mathscr{L}}, \quad M \in \Phi N^n_\lambda \\ 0 & \textit{si } \Pi \textit{ n'est pas du type ci-dessus} \end{cases}$$

3.1.2. *Une inclusion*

Pour ce paragraphe, on doit rentrer un peu dans le détail de [**28**]. Notons simplement $X := {}^p\mathrm{M}^n_{\mathbb{Q}_p}$ et posons $\mathcal{O}^n := \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ laquelle est une L-représentation de $G \times \check{G}$. Pour $k, m \in \mathbb{Z}$ on définit $\mathcal{O}^n\{k,m\}$ par $\mathcal{O}^n\{k,m\} = \mathcal{O}^n$, en tant que $L[\check{G}]$-module topologique, et l'action de $g \in G$ est définie pour $f \in \mathcal{O}^n$ par :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad (g \star f)(z) = j(z,g)^{-k} \det(g)^m f(g \cdot z),$$

où l'on note $\pi\colon {}^p\mathrm{M}^n_{\mathbb{Q}_p} \to {}^p\mathrm{M}^0_{\mathbb{Q}_p}$ la projection naturelle et $j(z,g) = (a - c\pi(z)) \in \mathcal{O}$ le facteur d'automorphie. L'action considérée a un sens puisque $\mathcal{O}^n$ est naturellement un $\mathcal{O}^0$-module. Pour $\lambda \in P_+$, on pose

$$\mathcal{O}^n_\lambda := \mathcal{O}^n\{1 - w(\lambda), 1 - \lambda_2\} \otimes_L |\det|_p^{\frac{1-|\lambda|}{2}}.$$

Lemme 3.6. — *Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$, le $L[G]$-module $\mathcal{O}^n_\lambda$ n'a pas de vecteurs G-bornés, i.e. $(\mathcal{O}^n_\lambda)^{G-\mathrm{b}} = 0$.*

Démonstration. — Par [**10**, Remarque A.2], pour $w(\lambda) = 1$, on a $(\mathcal{O}^n_\lambda)^{G-\mathrm{b}} = L$. Quitte à tordre par un caractère, on peut supposer que $\lambda = (0, k+1)$ avec $k \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{O}^n_\lambda$ une fonction G-bornée, en agissant par le sous-groupe unipotent de G, on en déduit en particulier que

$$\{f(z+b)\}_{b \in \mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{O}^n_\lambda$$

est une partie bornée. Mais ceci implique que f est une fonction bornée sur X et donc, par [**10**, Remarque A.2], $f \in L$ est une constante. Mais dans ce cas, par l'action de G

$$\{|ad|^{\frac{1-k}{2}} a^{-k} f\}_{a,d \in \mathbb{Q}_p^\times} \subset L,$$

est une partie bornée. Donc $f = 0$, ce qui conclut la preuve. □

Soit $M \in \Phi N_\lambda$, on introduit quelques notations :

- $\mathrm{H}^\lambda_{\text{pét},C} := \mathrm{H}^1_{\text{pét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_C\,;\,\mathbb{V}_\lambda(1)\big)$, le premier groupe de cohomologie proétale de $\mathbb{V}_\lambda(1)$,

- pour Z un $L[\breve{G}]$-module, $Z[M] := \mathrm{Hom}_{\breve{G}}(\mathrm{JL}_M \otimes_L |\mathrm{nrd}|_p^{\frac{1-w}{2}}, Z)$,
- $X^1_{\mathrm{st}}(M) := (\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{N=0, \varphi=p}$.

Proposition 3.7. — *Soit $\lambda \in P_+$ tel que $w(\lambda) > 1$ et $M \in \Phi N^n_\lambda$. On a une inclusion de $L[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \times G]$-modules topologiques*

$$\mathrm{H}^\lambda_C[M] \hookrightarrow t^{\lambda_1} X^1_{\mathrm{st}}(M[\lambda_1]) \widehat{\otimes}_L (\widehat{\mathrm{LL}}^\lambda_M)'$$

Démonstration. — On peut supposer $\lambda_1 = 0$ quitte à tordre par un caractère et poser $w = \lambda_2$. On commence par supposer M cuspidal. Alors, d'après [**28**, Corollaire 11.11] on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{B}_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}^n_\lambda[M] \to \mathrm{H}^\lambda_{\text{pét},C}[M] \to X^1_{\mathrm{st}}(M) \widehat{\otimes}_L (\mathrm{LL}^\lambda_M)' \to 0,$$

où $\mathrm{B}_\lambda := \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^w$. On passe aux vecteurs G-bornés dans la suite exacte et comme

- $(\mathcal{O}^n_\lambda[M])^{G-\mathrm{b}} = 0$ par le lemme 3.6,
- $(\mathrm{H}^\lambda_{\text{pét},C}[M])^{G-\mathrm{b}} = \mathrm{H}^\lambda_C[M]$ par [**28**, Théorème 10.1],
- $((\mathrm{LL}^\lambda_M)')^{G-\mathrm{b}} \cong (\widehat{\mathrm{LL}}^\lambda_M)'$ par [**12**, Lemme 5.3 b)],

on obtient l'inclusion voulue.

On suppose maintenant que M est spécial et, quitte à tordre par un caractère, on peut supposer $M = \mathrm{Sp}(|\lambda| - 2)$. Alors, d'après [**28**, Corollaire 12.15] on a une suite exacte

$$0 \to Q^0_\lambda \otimes_L W_\lambda \to \mathrm{H}^\lambda_{\text{pét}}[M] \to \mathrm{B}_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_\lambda\big)' \to Q^1_\lambda \widehat{\otimes}_L \big(\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_\lambda\big)' \to 0.$$

où

$$\mathrm{U}^0_\lambda(L) := L \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \big(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi^2 = p^{w+1}}, \quad \mathrm{U}^1_\lambda := L \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} \big(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cr}}\big)^{\varphi^2 = p^{w-1}}, \quad Q^i_\lambda := \frac{\mathrm{B}_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}{\mathrm{U}^i_\lambda(L)}$$

Notons $K := \ker(\mathrm{B}_\lambda \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \big(\mathrm{St}^{\mathrm{lan}}_\lambda\big)' \to Q^1_\lambda \widehat{\otimes}_L \big(\mathrm{St}^{\mathrm{lalg}}_\lambda\big)')$. Alors on obtient la suite exacte courte

$$0 \to Q^0_\lambda \otimes_L W_\lambda \to \mathrm{H}^\lambda_{\text{pét}}[M] \to K \to 0,$$

où l'on passe aux vecteurs G-bornés. Or comme

- $W^{G-\mathrm{b}}_\lambda = 0$,
- $(\mathrm{H}^\lambda_{\text{pét},C}[M])^{G-\mathrm{b}} = \mathrm{H}^\lambda_C[M]$ par [**28**, Théorème 10.1] comme précédemment,
- $K^{G-\mathrm{b}} \hookrightarrow \mathrm{U}^1_\lambda(L) \widehat{\otimes}_L \mathscr{D}^\lambda$ par le lemme 2.6, en prenant les vecteurs G-bornés dans la définition de K,

on obtient une injection $\mathrm{H}^\lambda_{\text{pét}}[M] \hookrightarrow \mathrm{U}^1_\lambda(L) \widehat{\otimes}_L \mathscr{D}^\lambda$ et comme $\mathrm{U}^1_\lambda(L) \subset X^1_{\mathrm{st}}(M)$ on obtient l'inclusion voulue. □

3.1.3. *Résultats de finitude.* — D'après [**28**, Proposition 10.12], on a la proposition suivante :

Proposition 3.8. — *Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_K ; \mathbb{V}^+_\lambda/\varpi_{\mathrm{D}}\big)$ est le dual d'un $\mathrm{O}_L[G]$-module lisse de longueur finie.*

Une preuve similaire par descente galoisienne donne la proposition suivante :

Proposition 3.9. — *Soit π une k_L-représentation lisse et admissible de G, alors*

$$\mathrm{Hom}_{k_L[G]}\big(\pi' ; \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_C ; \mathbb{V}^+_\lambda/\varpi_{\mathrm{D}}\big)\big)$$

est un k_L-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — Le corollaire [**12**, Corollaire 4.21] implique que pour tout k_L-système local (de rang fini) trivial T, $\mathrm{Hom}_{k_L[G]}\big(\pi' ; \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^n_C ; T\big)\big)$ est de dimension finie et comme $\mathbb{V}^+_\lambda/\varpi_{\mathrm{D}}$ est trivial sur ${}^p\mathrm{M}^n_C$ dès que $n \geqslant 1$, il suffit de montrer le résultat pour $n = 0$ ce que l'on fait par la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée au cas $n = 1$. Fixons π un $k_L[G]$-module lisse et pour X un $k_L[G]$-module, notons provisoirement $X[\pi'] := \mathrm{Hom}_{k_L[G]}\big(\pi' ; X\big)$. Notons

$$\mathrm{H} := \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^0_C ; \mathbb{V}^+_\lambda(1)/\varpi_{\mathrm{D}}\big), \quad \widetilde{\mathrm{H}} := \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}^1_C ; \mathbb{V}^+_\lambda(1)/\varpi_{\mathrm{D}}\big).$$

Comme on l'a rappelé, $\widetilde{\mathrm{H}}[\pi']$ est de dimension finie. Comme ${}^p\mathrm{M}_C^1 \to {}^p\mathrm{M}_C^0$ est un recouvrement étale de groupe de Galois $\mathbb{F} := \mathbb{F}_{q^2}^\times$, la suite spectrale de Hochschild-Serre donne une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathbb{F}, \widetilde{\mathrm{H}}) \to \mathrm{H} \to \widetilde{\mathrm{H}}^{\mathbb{F}}$$

Premièrement, justifions que $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}, \widetilde{\mathrm{H}})[\pi'] = 0$. Comme l'action de G et $\check{G}$ commutent, on a $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}, \widetilde{\mathrm{H}})[\pi'] = \mathrm{H}^1(\mathbb{F}, \widetilde{\mathrm{H}}[\pi'])$. Mais comme $\widetilde{\mathrm{H}}[\pi']$ est un k_L-espace vectoriel de dimension finie et que $\mathbb{F}$ est un groupe fini d'ordre premier à p, $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}, \widetilde{\mathrm{H}}[\pi']) = 0$. On obtient une inclusion

$$\mathrm{H}[\pi'] \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}^{\mathbb{F}}[\pi']$$

Or, $\widetilde{\mathrm{H}}^{\mathbb{F}}$ est un sous-$k_L[G]$-module de $\widetilde{\mathrm{H}}$ et donc on obtient une application injective

$$\mathrm{H}[\pi'] \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}[\pi'].$$

Comme $\widetilde{\mathrm{H}}[\pi']$ est de dimension finie, ceci conclut la preuve. □

3.1.4. *Vecteurs presque lisses.* — Soit V^+ une O_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Rappelons qu'on dit que $x \in V^+$ est *presque lisse* si pour tout entier $k \geqslant 1$, la classe de x modulo p^k est fixe par un sous-groupe ouvert de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Les vecteurs presque lisses de V^+ forment une sous-O_L-représentation de V^+.

Proposition 3.10. — *L'application naturelle*

$$\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to \mathrm{H}^{\lambda,+}_C$$

est injective et identifie $\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ *aux vecteurs presque lisses de* $\mathrm{H}^{\lambda,+}_C$ *sous l'action de* $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Démonstration. — Soit $k \geqslant 1$ un entier, et $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. Comme on a supposé que $w(\lambda) > 1$ on a $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}({}^p\mathrm{M}_C^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_{\mathrm{D}}^k) = 0$ dès que $k > 2n$. Donc la suite spectrale d'Hochschild-Serre donne

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}({}^p\mathrm{M}_K^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_{\mathrm{D}}^k) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}({}^p\mathrm{M}_C^n, \mathbb{V}_\lambda^+/\varpi_{\mathrm{D}}^k)^{\mathscr{G}_K}$$

En passant à la limite projective sur k, on obtient le résultat. □

En particulier, comme les $V^\lambda_{M,\mathscr{L}}$ ont des réseaux $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-stables dont tous les vecteurs sont presque lisses, on déduit du théorème 3.5 le corollaire suivant :

Corollaire 3.11. — *Soit* Π *une* L*-représentation unitaire et irréductible de* G *sur un espace de Banach, alors*

$$\mathrm{Hom}_G\big(\Pi', \mathrm{H}^\lambda_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\big) \cong \begin{cases} V^\lambda_{M,\mathscr{L}} \otimes_L \mathrm{JL}^\lambda_M & \textit{si } \Pi = \Pi^\lambda_{M,\mathscr{L}} \textit{ et } \mathrm{niv}(M) \leqslant n \\ 0 & \textit{si } \Pi \textit{ n'est pas du type ci-dessus} \end{cases}$$

Corollaire 3.12. —

1. $\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ *est sans* p*-torsion,* p*-adiquement complet et* p*-saturé dans* $\mathrm{H}^{\lambda,+}_C$.
2. *Pour tout entier* $k \geqslant 1$, $\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/p^k$ *est une* O_L*-représentation lisse de* $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$.
3. *Pour tout entier* $k \geqslant 1$ *et toute extension finie* $K/\mathbb{Q}_p$*, le* $\mathrm{O}_L[G]$*-module* $(\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/p^k)^{\mathscr{G}_K}$ *est lisse de longueur finie.*

Démonstration. — Les deux premiers points sont des conséquences de 3.10 et du fait que $\mathrm{H}^{\lambda,+}_C$ est p-adiquement complet et sans p-torsion.

Pour le dernier point, on se ramène au cas $k = 1$ par un dévissage immédiat. La preuve se fait comme [**12**, Proposition 5.19], on la rappelle brièvement. Notons

$$Y := (\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/p)^{\mathscr{G}_K}, \; Z := \mathrm{H}^1_{\text{ét}}\big({}^p\mathrm{M}_C^n\,;\, \mathbb{V}_\lambda^+(1)/\varpi_{\mathrm{D}}\big)^{\mathscr{G}_K}$$

On a une injection continue $\iota\colon Y \hookrightarrow Z$, G-équivariante, définie comme composée des morphismes $Y \to (\mathrm{H}^{\lambda,+}_C/p)^{\mathscr{G}_K} \to Z$ donnée par les points précédents. Par la proposition 3.8, il suffit de montrer que ι est un homéomorphisme sur son image. Or, Z étant profini, Y est séparé. Soit $H \subset G$ un sous-groupe ouvert compact. Alors Y et Z sont naturellement des $\mathrm{O}_L[\![H]\!]$-modules et ι est $\mathrm{O}_L[\![H]\!]$-linéaire. De plus, Z est un $\mathrm{O}_L[\![H]\!]$-module de type fini et donc Y aussi (comme $\mathrm{O}_L[\![H]\!]$ est noethérien). Or, Y est séparé, sa topologie est définie par sa topologie naturelle de $\mathrm{O}_L[\![H]\!]$-module de type fini. En particulier, Y est profini et ι est un isomorphisme sur son image. □

3.2. Décomposition en blocs

3.2.1. *Rappels sur la théorie des blocs.* — Soit $\zeta\colon \mathbb{Q}_p^\times \to \mathrm{O}_L^\times$ un caractère unitaire. On rappelle que l'on note $\mathrm{Tors}\, G$ (*resp.* $\mathrm{Tors}^\zeta\, G$) la catégorie abélienne des $\mathrm{O}_L[G]$-modules lisses de longueur finie (et de caractère central ζ). Rappelons que pour π un $\mathrm{O}_L[G]$-module lisse, on définit le dual de Pontryagin de π :

$$\pi^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_L}(\pi, L/\mathrm{O}_L),$$

où l'on considère les applications continues et $\pi^\vee$ est muni de l'action contragrédiente de G.

Pour $\pi \in \mathrm{Tors}^{(\zeta)}\, G$ on note $P_\pi^{(\zeta)} \twoheadrightarrow \pi^\vee$ l'enveloppe projective de $\pi^\vee$ (*cf.* [**20**, §II.5] et [**24**, §2]) ; c'est un $\mathrm{O}_L[G]$-module compact. Pour $\mathcal{B}$ un bloc de $\mathrm{Tors}^{(\zeta)}\, G$ posons

$$P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := \bigoplus_{\pi\in\mathcal{B}} P_\pi^{(\zeta)}, \quad E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := \mathrm{End}_G(P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}), \quad Z_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} := Z(E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}),$$

où $Z(E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)})$ désigne le centre de $E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}$.

Proposition 3.13. — *On a une décomposition*

$$\mathrm{Tors}^{(\zeta)}\, G = \prod_{\mathcal{B}} \mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}\, G.$$

De plus, pour $\Pi \in \mathrm{Tors}^{(\zeta)}\, G$*, on a*

$$\Pi \cong \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)} \otimes_{E_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}(\Pi^\vee))^\vee,$$

où $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}(\Pi^\vee) := \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}^{(\zeta)}, \Pi^\vee)$.

Remarque 3.14. —

Lemme 3.15. — *Soit* $\mathfrak{m}_x \subset R_{\mathcal{B},M}^\lambda[1/p]$ *un idéal maximal ; notons* L_x *son corps résiduel,* $\zeta := \zeta_M^\lambda$ *et rappelons que* $\Pi_x := \mathbf{\Pi}(\rho_x)$ *est la* L_x*-représentation de Banach unitaire associée à la spécialisation de la représentation universelle au point* x*. Alors,*

$$\Pi_x' \cong P_{\mathcal{B}}^\zeta \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^\zeta(\Pi_x')$$

où l'on rappelle que $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}^\zeta(\Pi_x') \cong \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}^\zeta, \Pi_x')$.

Démonstration. — Notons

$$R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps},\zeta} \subset R := R_{\mathcal{B},M}^\lambda, \quad L := L_x, \quad E := E_{\mathcal{B}}^\zeta, \quad E_x := E \otimes_{R^+} L$$

Soit $\Pi_x^+ \subset \Pi_x$ un O_{L_x}-réseau stable et pour $k \geqslant 0$ un entier, $\pi_k := \Pi_x^+/\varpi_L^k$. Alors $\pi_k \in \mathrm{Tors}_{\mathcal{B}}^\zeta\, G$ et d'après la proposition 3.13, on a

$$\pi_k \cong (P_{\mathcal{B}}^\zeta \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^\zeta(\pi_k^\vee))^\vee$$

En passant à la limite projective sur k, comme

$$\varprojlim_k \pi_k^\vee \cong \varprojlim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_L}(\pi, \varpi_L^{-k}\mathrm{O}_L/\mathrm{O}_L) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_L}(\varprojlim_k \pi_k, \mathrm{O}_L),$$

ce qui vaut pour toute famille projective π_k de $\mathrm{O}_L[G]$-modules tels que $\pi_{k+1}/\varpi_L^k = \pi_k$, on obtient, en prenant le O_L-dual continu

$$(\Pi_x^+)' \cong P_{\mathcal{B}}^\zeta \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}^\zeta((\Pi_x^+)')$$

on inverse p pour obtenir le résultat. □

3.2.2. *Décomposition au niveau entier.* — On commence par démontrer une décomposition au niveau entier, posons $\mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}} \coloneqq \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, \mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$.

Proposition 3.16. — *On a un isomorphisme naturel de $L[\mathbb{G}]$-modules topologiques*

$$\mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \cong \widehat{\bigoplus_{\mathcal{B}}} \left[P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}} \right].$$

où le complété à droite est le complété p-adique.

Démonstration. — La preuve est strictement la même que celle de [**12**, Proposition 5.21] ; rappelons-en les points principaux. Notons $X \coloneqq \mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ et pour $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie $X_{k,K} \coloneqq (X/p^k)^{\mathscr{G}_K}$. D'après la proposition 3.8, $X_{k,K}$ est le dual d'un $\mathrm{O}_L[G]$-module lisse de longueur finie. On peut donc appliquer la décomposition en blocs de la proposition 3.13 au dual de $X_{k,K}$ *i.e.*

$$X_{k,K} = \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X_{k,K}).$$

En passant à la limite inductive sur les extensions finies $K/\mathbb{Q}_p$, puisque $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) = \varinjlim_K \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X_{k,K})$ car $P_{\mathcal{B}}$ est compact et les $X_{k,K}$ sont profinis, on obtient, par le corollaire 3.12

$$X/p^k = \bigoplus_{\mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}} \otimes_{E_{\mathcal{B}}} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k)).$$

Comme $X = \varprojlim_k X/p^k$ d'après le corollaire 3.12 il reste à montrer $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X)/p^k$. La suite de la preuve de [**12**, Proposition 5.21] démontre essentiellement le lemme suivant :

Lemme 3.17. — *Soit X un $\mathrm{O}_L[G]$-module topologique tel que*

- *X est sans p-torsion et p-adiquement complet,*
- *X/p est la réunion de O_L-modules de longueur finie.*

Alors, pour tout $k \geqslant 1$ on a un isomorphisme $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X/p^k) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(X)/p^k$.

Dans notre cas ce lemme s'applique puisque le premier point du lemme est vérifié par le corollaire 3.12 et le second point par la proposition 3.8. □

Posons

$$\check{\mathbf{m}}^+_{\mathcal{B},\text{ét}} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_L}(\mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}}, \mathrm{O}_L),$$

le dual continu topologique de $\mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}}$. C'est un O_L-module compact sans p-torsion muni d'une action de $Z_{\mathcal{B}}$.

Proposition 3.18. — *Le $Z_{\mathcal{B}}$-module $\check{\mathbf{m}}^+_{\mathcal{B},\text{ét}}$ est de type fini.*

Démonstration. — La preuve se fait exactement comme pour le [**12**, Théorème 5.22] en utilisant la proposition 3.9, rappelons-la brièvement. Soit $\mathfrak{m} \subset Z_{\mathcal{B}}$ l'idéal maximal. Par le lemme de Nakayama (topologique) et la dualité, il suffit de montrer que $(\mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}}/\varpi_L)[\mathfrak{m}]$ est de dimension finie sur k_L. On a une injection

$$\mathbf{m}^+_{\mathcal{B},\text{ét}}/\varpi_L[\mathfrak{m}] \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}} \otimes_{Z_{\mathcal{B}}} k_L, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}({}^p\mathrm{M}^n_C\,;\,\mathbb{V}^+_\lambda(1)/\varpi_{\mathrm{D}})).$$

Mais comme, d'après [**26**, corollaire 6.7], $P_{\mathcal{B}} \otimes_{Z_{\mathcal{B}}} k_L$ est le dual d'une L-représentation lisse et admissible de G, on conclut la preuve de la proposition par la proposition 3.9. □

3.2.3. *$E^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est une algèbre d'Azumaya.* — Posons

$$E^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \coloneqq E^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}} \otimes_{R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}} R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}.$$

Dans ce paragraphe, on démontre que $E^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est une $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$-algèbre d'Azumaya. Notons que $E^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}$ n'est pas une algèbre d'Azumaya et que le résultat tient car les représentations apparaissant dans l'anneau de Kisin sont absolument irréductibles. Pour démontrer ce résultat on doit raisonner bloc par bloc. Rappelons que (sous l'hypothèse que $p > 3$), les blocs absolus $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Tors}\, G$ sont de la forme

(i) $\mathcal{B} = \{\pi\}$ où π est une k_L-représentation supersingulière de G,

(ii) $\mathcal{B} = \{\mathrm{Ind}^G_B \chi_1 \otimes \chi_2\omega^{-1}, \mathrm{Ind}^G_B \chi_2 \otimes \chi_1\omega^{-1}\}$ où $\chi_1, \chi_2 \colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to k_L^{\times}$ sont des caractères lisses tels que $\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1, \omega^{\pm 1}$,

(iii) $\mathcal{B} = \{\mathrm{Ind}^G_B \chi \otimes \chi\omega^{-1}\}$ où $\chi \colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to k_L^{\times}$ est un caractère lisse,

(iv) $\mathcal{B} = \{\eta \circ \det, \mathrm{Sp} \otimes (\eta \circ \det), (\mathrm{Ind}^G_B \omega \otimes \omega^{-1}) \otimes (\eta \circ \det)\}$ où $\eta \colon \mathbb{Q}_p^{\times} \to k_L^{\times}$ est un caractère lisse et $\mathrm{Sp} \coloneqq \mathrm{St}_{\mathrm{O}_L} \otimes_{\mathrm{O}_L} k_L$ est la Steinberg lisse à coefficients dans k_L.

Proposition 3.19. — *Soit $\mathfrak{m}_x \subset R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel. Posons $E_x \coloneqq E^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} L_x$, alors si $\mathcal{B}$ est de type*

(i) $E_x \cong L_x$,

(ii) $E_x \cong M_2(L_x)$,

(iii) $E_x \cong M_2(L_x)$,

(iv) $E_x \cong M_3(L_x)$.

En particulier, $E^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est une $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$-algèbre d'Azumaya.

Démonstration. — Comme annoncé on raisonne bloc par bloc. Soit

$$E \coloneqq E^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}, \quad R^+ \coloneqq R^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}, \quad R_M \coloneqq R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$$

On note $\mathfrak{r} \coloneqq R^+ \cap \bigcap_x \mathfrak{m}_x$ *l'idéal de réductibilité* où l'intersection est prise sur tous les idéaux maximaux de $R^+[1/p]$ tels que la représentation ρ_x soit réductible. Comme pour $\mathfrak{m}_x \subset R_M$, ρ_x est irréductible, l'image de tout élément non nul de $\mathfrak{r}$ dans L_x n'est pas nulle.

Si $\mathcal{B}$ est de type *(i)* alors par [**24**, Theorem 1.5], $E \cong R^+$ donc $E_x \cong L_x$.

Si $\mathcal{B}$ est de type *(ii)* alors par [**24**, Corollary B.20], $\mathfrak{r} = (c)$ est principal et par [**24**, Corollary B.27], $E_c \cong M_2(R^+_c)$ et donc $E_x \cong M_2(L_x)$.

Si $\mathcal{B}$ est de type *(iii)* c'est exactement l'énoncé de [**24**, Corollary 9.28] (combiné au [**24**, Lemme 9.21] donnant la condition sur « $(uv - vu)(uv - vu)^*$ »puisque ρ_x est absolument irréductible.

Si $\mathcal{B}$ est de type *(iv)*, l'énoncé n'apparaît pas tel quel dans [**24**, §10] mais on peut le déduire des résultats de cette section.

Quitte à tordre par un caractère on peut supposer que $\eta = 1$, posons

$$\pi_1 \coloneqq \mathrm{Ind}^G_B \omega \otimes \omega^{-1}, \quad \pi_2 \coloneqq \mathrm{Sp}, \quad \pi_3 \coloneqq \mathbf{1}_G.$$

Pour $i = 1, 2, 3$ on pose P^i l'enveloppe projective de $\pi_i^{\vee}$, $P^i_x \coloneqq P^i \otimes_{R^+} L_x$ et pour $j = 1, 2, 3$, $E^{i,j} \coloneqq \mathrm{Hom}_G(P^i, P^j)$, $E^{i,j}_x \coloneqq E^{i,j} \otimes_{R^+} L_x$(on change légèrement les notations par rapport à [**24**, §10]). Comme les P^i sont compacts et projectifs on a $E^{i,j}_x = \mathrm{Hom}_G(P^i_x, P^j_x)$ et pour $\varphi \in E^{i,j}$ on note $\varphi_x \in E^{i,j}_x$ l'élément associé. Alors, $E = (E^{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ et $E_x = (E^{i,j}_x)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. On veut donc montrer que pour tous les entiers $i, j = 1, 2, 3$, $E^{i,j}_x \cong L_x$.

Pour $i = j$ le [**24**, Corollary 10.78] donne $E^{ii} \cong R^+$ donc $E^{ii}_x \cong L_x$ pour $i = 1, 2, 3$. On a des idéaux $\mathfrak{a}^{ii} \subset E^{ii}$ (*cf.* [**24**, Corollary 10.79] et avant le Lemme 10.74 pour la définition) tels que $\mathfrak{a}^{ii} \cong \mathfrak{r}$ d'après [**24**, Lemma 10.80] par l'isomorphisme $E^{ii} \cong R^+$ ci-dessus. Ainsi $\mathfrak{a}^{ii}_x \coloneqq \mathfrak{a}^{ii} \otimes_{R^+} L_x \cong L_x$. Le [**24**, Lemma 10.74] donne $\varphi^{31} \in E^{13}$ et $\varphi^{12} \in E^{21}$ tels que :

- (237) $\implies \varphi^{31} \circ \colon E^{11} \xrightarrow{\sim} E^{13} \implies E^{13}_x \cong L_x$,
- (238) $\implies \varphi^{12} \circ \colon E^{22} \xrightarrow{\sim} E^{21} \implies E^{21}_x \cong L_x$,

- (240) $\implies E^{12} \cong \mathfrak{a}^{11} \implies E_x^{12} \cong L_x$,
- (241) $\implies E^{31} \cong \mathfrak{a}^{33} \implies E_x^{31} \cong L_x$,
- (242) $\implies E^{32} \cong \mathfrak{a}^{33} \implies E_x^{32} \cong L_x$.

Il reste à montrer que $E_x^{23} \cong L_x$. Or, E^{23} est engendré sur R^+ par deux éléments (*cf.* [**24**,]) $\varphi^{32} := \varphi^{31} \circ \varphi^{12}$ et un autre élément β (*cf.* [**24**, Lemma 10.75]). On sait d'après les deux premiers points ci-dessus (correspondant à (237) et (238)) que φ^{32} est un isomorphisme et donc il reste à montrer qu'il existe une constante $u \in L_x$ telle que $\beta_x = u\varphi_x^{32}$.

D'après [**24**, Lemma 10.92] il existe $c, d \in R^+$ tels que $c\beta = d\varphi^{32}$. Mais d'après [**24**, Corollary 10.94], $c, d \in \mathfrak{r}$. Ainsi c et d sont des constantes non nulles modulo $\mathfrak{m}_x$ et $\beta_x = u\varphi_x^{32}$ où $u \in L_x$ est défini par $uc \equiv d \mod \mathfrak{m}_x$.

□

Le corollaire suivant est alors immédiat :

Corollaire 3.20. — *Soit F le corps des fractions d'un facteur de $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$. Alors $E^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} F$ est une algèbre semi-simple sur F.*

Corollaire 3.21. — *Soit $\mathfrak{m}_x \subset R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ un idéal maximal dont on note L_x le corps résiduel, notons $R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\zeta^\lambda_M}$, alors*

$$P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \otimes_{R^+} L_x \cong \Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^*.$$

De plus, $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un L_x-espace vectoriel de dimension fini.

Démonstration. — Notons

$$E := E_{\mathcal{B}}^{\zeta^\lambda_M}, \quad R^+ := R_{\mathcal{B}}^{\zeta^\lambda_M}, \quad E_x := E \otimes_{R^+} L_x, \quad P_x := P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \otimes_{R^+} L_x.$$

Par le lemme 3.15 on a

$$\Pi'_x \cong P_{\mathcal{B}}^{\zeta} \otimes_E \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong P_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x). \tag{3.2}$$

Notons que comme cet isomorphisme est un isomorphisme de E_x-modules $\Pi'_x \cong \Pi'_x \otimes_{L_x} E_x$. De plus, $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un L_x-espace vectoriel de dimension finie par [**26**, Corollary 6.7] car c'est un R^+-module de type fini. Comme $\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)$ est un E_x-module absolument irréductible par [**24**, Corollary 1.19], on a

$$\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x)^* \cong E_x.$$

Il suffit alors d'appliquer $\otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi_x)^*$ pour obtenir le résultat, soit

$$\Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi_x)^* \cong \Pi'_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong P_x \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{E_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \cong P_x \otimes_{E_x} E_x \cong P_x.$$

□

3.2.4. *Structure de $\mathbf{m}_{\mathcal{B},\text{ét}}$ comme $R_{\mathcal{B}}^{\text{ps}}$-module.* — Dans ce dernier paragraphe, on conclut la preuve du théorème 3.2. On commence par un lemme :

Lemme 3.22. — *Soit V, W deux $E^{\lambda}_{\mathcal{B},M}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules localement libres et de type fini sur $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$. Supposons que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$, dont on note L_x le corps résiduel, on a un isomorphisme $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant*

$$V \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} L_x \cong W \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} L_x,$$

et $V \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} L_x$ est irréductible, alors $V \cong W$.

Démonstration. — Comme $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est un produit d'anneaux principaux, il suffit de se ramener à l'un de ses facteurs, que l'on note R par un projecteur. Soit F le corps des fractions de R, notons

$$E_R := E^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} R, \quad E_F := E_R \otimes_R F, \quad V_F := V \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} F, \quad W_F := W \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} F.$$

Les traces de V et W coïncident car leurs spécialisations en tout idéal maximal de R coïncident (comme il y a une infinité d'idéaux premiers). De plus, V_F et W_F sont des $E_F[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules irréductibles, sinon il existerait un ouvert $U \subset \operatorname{Spec} R$ tel que la spécialisation de V et W en les points fermés de U serait réductible. Comme E_F est une algèbre semi-simple d'après le corollaire 3.20 et par le théorème de Brauer-Nesbitt, on obtient un isomorphisme $V_F \cong W_F$ de $E_F[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules. En recopiant la preuve de [**12**, Lemme 5.12] on en déduit un isomorphisme $V \cong W$ de $R[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules, mais par construction, cet isomorphisme étendu à F redonne l'isomorphisme précédent $V_F \cong W_F$ qui commute à l'action de E_F, on en déduit que l'isomorphisme $V \cong W$ commute à l'action de E_R et donc que c'est un isomorphisme de $E_R[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules. $\square$

Notons

$$\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},\text{ét}} := \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, \mathrm{H}^{\lambda,+}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}) \otimes_{\mathrm{O}_L} L$$

Remarquons que puisque $P_{\mathcal{B}}$ est compact on a $\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},\text{ét}} = \mathbf{m}^{\lambda,+}_{\mathcal{B},\text{ét}}$. On a de plus

$$\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},\text{ét}} = \bigoplus_{M\in\Phi N^n_{\lambda}} \mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_L \mathrm{JL}_M, \quad \mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M} := \mathrm{Hom}_{G\times\check{G}}(P_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{O}_L} \mathrm{JL}_M, \mathrm{H}^{\lambda}_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$$

On achève maintenant la démonstration du théorème 3.2. Notons que le centre de $\check{G}$ agit par le caractère ζ^{λ}_M sur $\mathrm{H}^1_{\overline{\mathbb{Q}}_p}[M]$, le centre de G agit par le caractère inverse $\zeta := (\zeta^{\lambda}_M)^{-1}$ (*cf.* [**12**, Remarque 5.23, (ii)]) ce qui fait de $\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ un $R^{\mathrm{ps},\zeta}_{\mathcal{B}}[1/p]$-module par le théorème 2.3 et

$$\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M} = \mathrm{Hom}_{G\times\check{G}}(P^{\zeta}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{O}_L} \mathrm{JL}_M, \mathrm{H}^{\lambda}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}).$$

Théorème 3.23. — *Soit $\lambda \in P_+$ et $M \in \Phi N^n_{\lambda}$.*

1. L'anneau $R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}$ agit sur $\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ au travers de son quotient $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$.

2. On a un isomorphisme de $E^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules

$$\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \cong \mathbf{m}^{\zeta}_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})') \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} \rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}} \check{R}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$$

où $\mathbf{m}^{\zeta}_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})') = \mathrm{Hom}_G(P^{\zeta}_{\mathcal{B}}, \mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})')$ et $\check{R}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est le L-dual continu de $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$.

Démonstration. — La preuve se fait exactement comme pour la preuve de [**12**, Théorème 5.24], donc on rappelle les éléments principaux.

Pour le premier point, notons $I := \ker(R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[1/p] \to R^{\lambda}_{\mathcal{B},M})$, on veut montrer que I annule $\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$. Comme $p > 3$, on peut utiliser le théorème 2.3 et considérer $J := I \cap Z^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}$. En vertu de la proposition 3.7, il suffit de montrer que J tue $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (\widehat{\mathrm{LL}}^{\lambda}_M)')$. Soit Y le complété p-adique d'un O_L-réseau G-stable de LL^{λ}_M. Par compacité de $P_{\mathcal{B}}$ il suffit alors de montrer que pour tout $n \geqslant 1$, J annule

$$\mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y/p^nY)')$$

On a un morphisme naturel d'image dense $Y \to Y_{\mathcal{B}}$ où $Y_{\mathcal{B}}$ est le complété $\mathcal{B}$-adique du réseau fixé de LL^{λ}_M ce qui induit une injection $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y_{\mathcal{B}}/p^nY_{\mathcal{B}})') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y/p^nY)')$. Il reste ensuite à montrer que cette injection est un isomorphisme et que J annule $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}}, (Y_{\mathcal{B}}/p^nY_{\mathcal{B}})')$; la preuve est *verbatim* la même que la preuve du premier point de [**12**, Théorème 5.24].

Pour le second point on pose $X := \mathrm{Spm}(R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[1/p])$ et $X^{\lambda}_M := \mathrm{Spm}(R^{\lambda}_{\mathcal{B},M})$ et soit $\mathfrak{m}_x \subset R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[1/p]$ l'idéal maximal d'un point $x \in X$ dont on note L_x le corps résiduel. On commence par calculer $(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M})[\mathfrak{m}_x]$:

- si $x \notin X^{\lambda}_M$, alors les images des éléments non nuls de $\mathfrak{m}_x$ par $R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[1/p] \to R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ sont inversibles et comme $(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M})$ est un $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$-module, $(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M})[\mathfrak{m}_x] = 0$,
- d'après le corollaire 3.21 on a

$$(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},M})[\mathfrak{m}_x] = \mathrm{Hom}_G(P_{\mathcal{B}} \otimes_{R^+} L_x, \mathrm{H}^{\lambda}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}) \cong \mathrm{Hom}_G(\Pi'_x \otimes_{L_x} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x), \mathrm{H}^{\lambda}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}) \cong \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_L \rho_x.$$

En résumé on a

$$(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},\text{ét}}[M])[\mathfrak{m}_x] \cong \begin{cases} \mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{L_x} \rho_x & \text{si } x \in X^{\lambda}_M, \\ 0 & \text{si } x \notin X^{\lambda}_M. \end{cases}$$

Notons que $(\mathbf{m}^{\lambda}_{\mathcal{B},\text{ét}}[M])[\mathfrak{m}_x]$ est le L_x-dual continu de $\check{\mathbf{m}}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}/\mathfrak{m}_x$. On calcule le L-dual continu de $\mathbf{n}^{\lambda}_{\mathcal{B},M} := \mathbf{m}^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})') \otimes_R \rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M} \otimes_R \check{R}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ pour obtenir

$$\check{\mathbf{n}}_{\mathcal{B},M} \cong \mathrm{Hom}_{R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}}(\mathbf{m}^{\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Pi}(\rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M})') \otimes \rho^{\lambda}_{\mathcal{B},M}, R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}).$$

Ainsi $\check{\mathbf{n}}_{\mathcal{B},M}/\mathfrak{m}_x \cong \mathrm{Hom}_{L_x}(\mathbf{m}_{\mathcal{B}}(\Pi'_x) \otimes_{L_x} \rho_x, L_x) \cong \check{\mathbf{m}}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}/\mathfrak{m}_x$. Or par la proposition 3.18, comme $\check{\mathbf{m}}^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$ est un $R^{\mathrm{ps},\zeta^{\lambda}_M}_{\mathcal{B}}[1/p]$-module par l'isomorphisme du théorème 2.3 on en déduit que c'est un $R^{\lambda}_{\mathcal{B},M}$-module de type fini. On est donc dans la situation du lemme 3.22 qui permet de conclure la preuve. □

Références

[1] G. Alon, E. de Shalit, On the cohomology of Drinfel'd's p-adic symmetric domain. *Isr. J. Math.* **129** (2002), 1–20.

[2] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique. Astérisque **319** (2008), 303–337.

[3] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée. Astérisque **331** (2010), 65–115.

[4] A. Chitrao, E. Ghate, Reductions of semi-stable representations using the Iwahori mod p Local Langlands Correspondence. Preprint, arXiv :2311.03740 [math.NT] (2023).

[5] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique. Astérisque **330** (2010), 13–59.

[6] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Astérisque **330** (2010), 213–262.

[7] P. Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules. Astérisque **330** (2010), 281–509.

[8] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Vecteurs localement analytiques. In *Automorphic forms and Galois representations. Proceedings of the 94th London Mathematical Society (LMS) – EPSRC Durham symposium, Durham, UK, July 18–28, 2011. Volume 1*, Cambridge Univ. Press (2014), 286–358.

[9] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Algebra Number Theory* **8** (2014), no. 6, 1447–1519.

[10] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld : le cas de la dimension 1. *J. Am. Math. Soc.* **33** (2020), no. 2, 311–362.

[11] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Correspondance de Langlands p-adique et anneaux de Kisin. *Acta Arith.* **208** (2023), no. 2, 101–126.

[12] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld. *Forum Math. Pi* **11** (2023), e16.

[13] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Camb. J. Math.* **2** (2014), no. 1, 1–47.

[14] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables. *Invent. Math.* **140** (2000), no. 1, 1–43.

[15] A. J. de Jong, Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compos. Math.* **97** (1995), no. 1–2, 89–118.

[16] G. Dospinescu, Extensions de de Rham et vecteurs localement algébriques. *Compos. Math.* **151** (2015), 1462–1498.

[17] V. G. Drinfel'd, Coverings of p-adic symmetric regions. *Funct. Anal. Appl.* **10** (1976), 107–115.

[18] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$. Preprint (2011), available at `https://math.uchicago.edu/~emerton/pdffiles/lg.pdf`.

[19] L. Fargues, A. Genestier, V. Lafforgues, L'isomorphisme entre les tours de Lubin–Tate et de Drinfeld. Progress in Mathematics, Vol. 262, Birkhäuser (2008).

[20] P. Gabriel, Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. Fr.* **90** (1962), 323–448.

[21] I. Gaisin, J. Rodrigues Jacinto, Arithmetic families of (φ, Γ)-modules and locally analytic representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Doc. Math.* **23** (2018), 1313–1404.

[22] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings. *J. Am. Math. Soc.* **21** (2008), no. 2.

[23] R. Liu, Semistable periods of finite slope families. *Algebra Number Theory* **9** (2015), no. 2, 435–458.

[24] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor. *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **118** (2013), 1–191.

[25] V. Paškūnas, Blocks for mod$p$ representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. In *Automorphic forms and Galois representations*, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **415**, Cambridge Univ. Press (2014), 231–247.

[26] V. Paškūnas, S.-N. Tung, Finiteness properties of the category of mod p représentations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Forum Math. Sigma* **9** (2021), e80, 39 pp.

[27] B. Schraen, Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées. *Isr. J. Math.* **176** (2010), 307–361.

[28] A. Vanhaecke, Cohomologie de systèmes locaux p-adiques sur les revêtements du demi-plan de Drinfeld. Preprint, arXiv :2405.10048 [math.NT] (2024).

[29] C. Wang-Erickson, Algebraic families of Galois representations and potentially semi-stable pseudo-deformation rings. *Math. Ann.* **371** (2018), no. 3–4, 1615–1681.

---

20 janvier 2026

Arnaud Vanhaecke, Morningside Center of Mathematics, No. 55, Zhongguancun East Road, Beijing, 100190, China.
E-mail : `arnaud@amss.ac.cn`